Un modèle socio mathématique simplifié (ne citer qu'en mentionnant la source)

Hugues Lagrange
OSC CNRS Sciences po
Dernier ouvrage paru Les Maladies du Bonheur. PUF

Je reprends le modèle SIR. Un modèle épidémiologique datant de 1927, qui donne de manière schématique la dynamique de l'épidémie en considérant que la population d'un groupe fermé constitué de trois compartiments : les personnes susceptibles S, les infectés I, les personnes rétablies (immunisées) ou décédés R (pour removed). susceptibles S, les personnes infectées I, les rétablis ou décédés R, S' et I' désignent les dérivées par rapport à t.

S'(t) = −(b/N)S(t)*I(t), (1)
I'(t) = (b/N)S(t* I(t) − v I(t), (2)
R'(t) = vI(t) (3)

Les personnes mortes ou guéries sont supposées sortir du groupe des personnes susceptibles ou infectables.
Ici b est le coefficient de transition vers l'infection et v le coefficient de sortie du bassin des personnes infectables par guérison ou décès, 1/v est la durée moyenne durant laquelle une personne contaminée est infectieuse.
Au départ on suppose que S(0) + I(0) = N, où N est la population, et il n'y a ni naissances ni migrations dans le court terme. On s'intéresse à l'évolution des infections I(t).

(2) peut s'écrire I'(t)/I(t) ={ b(S(t)/N)-v}

d'où : $\ln(I_{(t)}) = \int b(S(t)/N) - v\} \, dt$ +c, où c est une constante d'intégration.

et $I_{(t)} = C \exp([\int \{b(S(t)/N) - v\} \, dt]$,

Le nombre de personnes infectées à la date t, est donné par l'expression

$$I_{(t)} = I_0 \exp[\int \{\tfrac{b}{N} \, v * S(t) - v\} \, dt$$

Où : b est le taux de nouveau cas de contamination par unité de temps,
1/V est la durée de la vie infectieuse, et
S(t) la population susceptible d'être contaminée au moment t.

On peut encore écrire :

$$I_t = I_0 \exp[\int \{ \left(\frac{b}{N} V\right) * S(t) - 1\} \, dt$$

Avec les conditions initiales $I(0) = I_0$, $S(0) = S_0$. On considère que $b > 0$, $I_0 > 0$ et $S_0 > 0$;
et en appelant $r_0 = b*v*S_0/N$ (coefficient de reproduction de base ou d'attaque de l'épidémie).
Si $r_0 > 1$, l'épidémie se développe.

Mais la population susceptible S(t) n'est pas fixe car les personnes infectées sont exclues de la population susceptible. Le problème est de savoir comment calculer l'intégrale puisque S(t) dépend de I(t).
On peut utiliser pour une solution en continu, une formalisation issue de la loi de croissance des populations. En disant que dI/dt dépend directement du nombre de personnes infectées I(t), mais aussi par la probabilité de rencontre entre un infecté et un suceptible I(t) * S(t).
En posant S(t) = N-I(t), et I'(t)=dI/dt, l'équation (2) peut être écrite :

$$I'(t) = (b[N-I(t)]/N)* I(t) - v\, I(t) \qquad (4)$$

$$I'(t) = (b - v)* I(t) - (b/N)*I^2(t) \qquad (5)$$

d'après B Rao, un maître indien, quand on a une équation de type dP/ P(μ- θ P)= dt, on obtient par séparation des variables :

$$1/ P(\mu - \theta P) = (1/ \mu)*[1/P + \theta / (\mu - \theta P)]$$

Ce qui donne par intégration une fonction logistique :

$$\frac{1}{\mu}\{ln(P/Po) + ln\frac{|\mu - \theta Po|}{|\mu - \theta P|}\} = t - t_o$$

Comme $\mu - \theta Po > 0$ et $\mu - \theta P > 0$: $P(t) = \mu Po/\{(\theta Po + (\mu - \theta Po) * e^{-[\mu(t-to)]}\}$

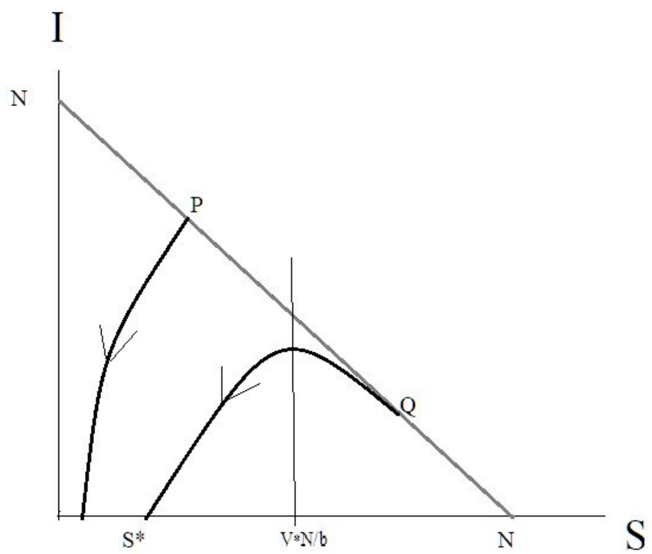
En remplaçant dans cette formule P par I les infectés , μ par (b-v) et θ par b/N :

$$I(t) = \frac{(b-v)Io}{(\frac{b}{N})\, Io + (b(1-\frac{1}{N})-v)\, Io * e^{-[(b-v)(t-to)]}} \qquad (6)$$

La population susceptible N-I(t), diminue à mesure que les gens sont contaminés ou meurent. Avec une telle dynamique, tant que le population susceptible n'est pas réduite pas l'entrée d'une fraction significative de la population dans le compartiment contaminé et donc immunisé, la croissance est exponentielle, elle s'amortit puis s'inverses à mesure que le bassin de personnes déjà contaminées commence à réduire les contaminations possibles : courbe entre Q et S*.

Tous les points de la droite N-N sur le graphique ci-dessous sont les points de départ possibles. Si le point de départ est situé à gauche du le ratio d'attaque v*N/b, il y a extinction (si l'on part de P par exemple). En revanche si, du fait d'une grande contagiosité, on part de Q situé à droite, l'épidémie se développe, on voyage de droite à gauche de la courbe liant Q à S*. Si l'épidémie part de Q, elle commence par croître et atteint un maximum quand S = $\frac{b}{N}$ v, car dI/dS=0 ⇔{($\frac{b}{N}S - v)I$ }/(- $\frac{b}{N}SI$)}=0.

Voici un diagramme de phase simplifié dans le plan (S, I).

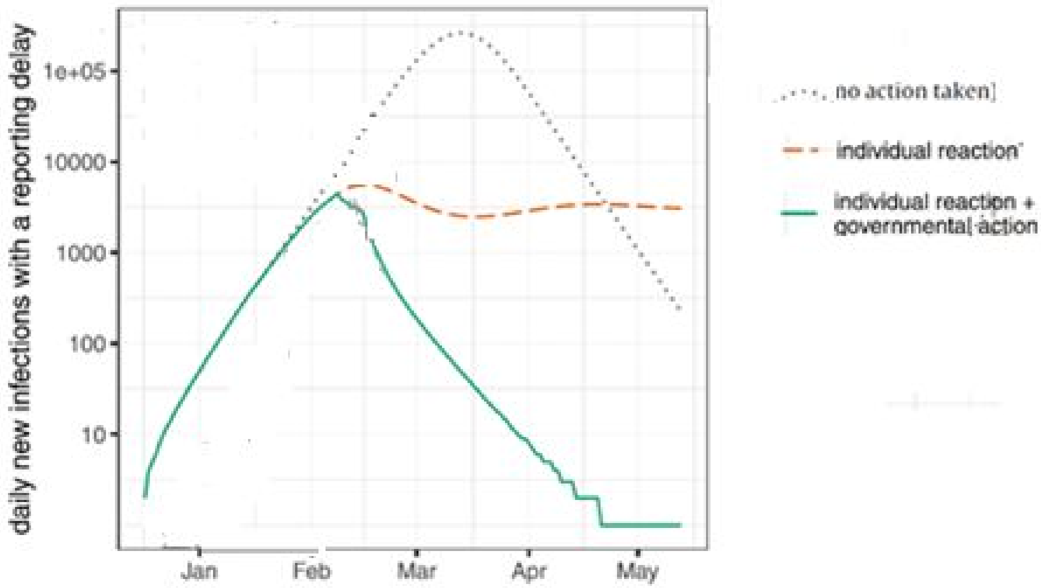


Suivant l'idée de Qianying Lin & al. sur le fait qu'il y a des adaptations comportementales et b/N évolue dans le temps en fonction de la peur due aux décès et à l'effet coercitif de l'action publique. Les auteurs ont envisagent à la place d'un taux constant biologique b/N un taux qui dépend des comportements des individus et de l'action publique :

$$b' = b/N = \beta * (1 - \alpha) * (1 - \frac{D(t)}{N})^k \qquad (7)$$

Q Lin et al. 2020 montrent qu'en Chine le facteur action coercitive combiné avec l'émotion a un effet important. J'ai repris cette idée mais en m'attachant d'abord à l'effet des comportements sociaux devant le danger. Je reprends les paramètres de la formule de Q Lin. Dans cette formule β est le taux de contamination biologique par unité de temps, c'est-à-dire le nombre de contacts infectants qu'une personne peut avoir par unité de temps. Sachant que la période infectante est autour de 4-5 jours, qu'un individu au cours de sa période infectieuse contamine (0.53 multiplié 4 ou 5 jours) entre 2 et 2.5 personnes. Ceci sans modifier sa sociabilité habituelle, comme si les effets de l'épidémie étaient invisibles. La vitesse de propagation des contaminations tient aux fait que le virus est projeté dans l'haleine peut ainsi atteindre les voies respiratoires d'un interlocuteur, et d'autre part se transmet par la peau. D(t) désigne le nombre des morts observés dans la région à la date t. N la taille de la population de cette région. Le coef. k est un coefficient d'intensité de la réponse adaptative (il est utilisé par Lin, mais le spectre de valeurs que j'ai retenu a été établi de manière très empirique : essais corrections).

Q. Lin et al. / International Journal of Infectious Diseases 93 (2020) 211–216



three scenarios:
no action taken] as grey dotted curve,
individual reaction regarding to the outbreak as red dashed curve, and
individual reaction plus governmental action as green solid curve.

J'avais en tête en formalisant la dynamique épidémique ce qui se passait en Lombardie, soit une population de 10 millions. Ce qui intéresse le sociologue, c'est l'idée que ce ne sont pas seulement les informations circulant dans les médias ou sur les réseaux digitaux qui affectent le comportement de précaution, d'auto-confinement, mais aussi que l'émotion devant la mort de proches induit des adaptations, qui varient avec la sensibilité personnelle, et le sentiment de sa propre vulnérabilité. C'est quelque chose que j'ai observé avec la peur du crime qui est plus fortement dirigée par la fragilité personnelle que par le taux de criminalité objectivable dans la zone de résidence des gens.

La coercition politique réduit aussi de manière plus mécanique les interactions c'est le rôle du coef. α, qui mesure l'effet coercitif sur le degré de confinement due aux mesures publiques dans la formulation de Lin (équation 7). J'ai considéré ici, faute de capacités de modéliser cet effet, uniquement les comportements adaptatifs entrepris par les individus, comme si la peur ou préoccupation pour ses proches seules agissaient. Il faudrait si on en est capable la formaliser.

$$b' = b/N = \beta * \left(1 - \frac{D(t)}{N}\right)^k \qquad (8)$$

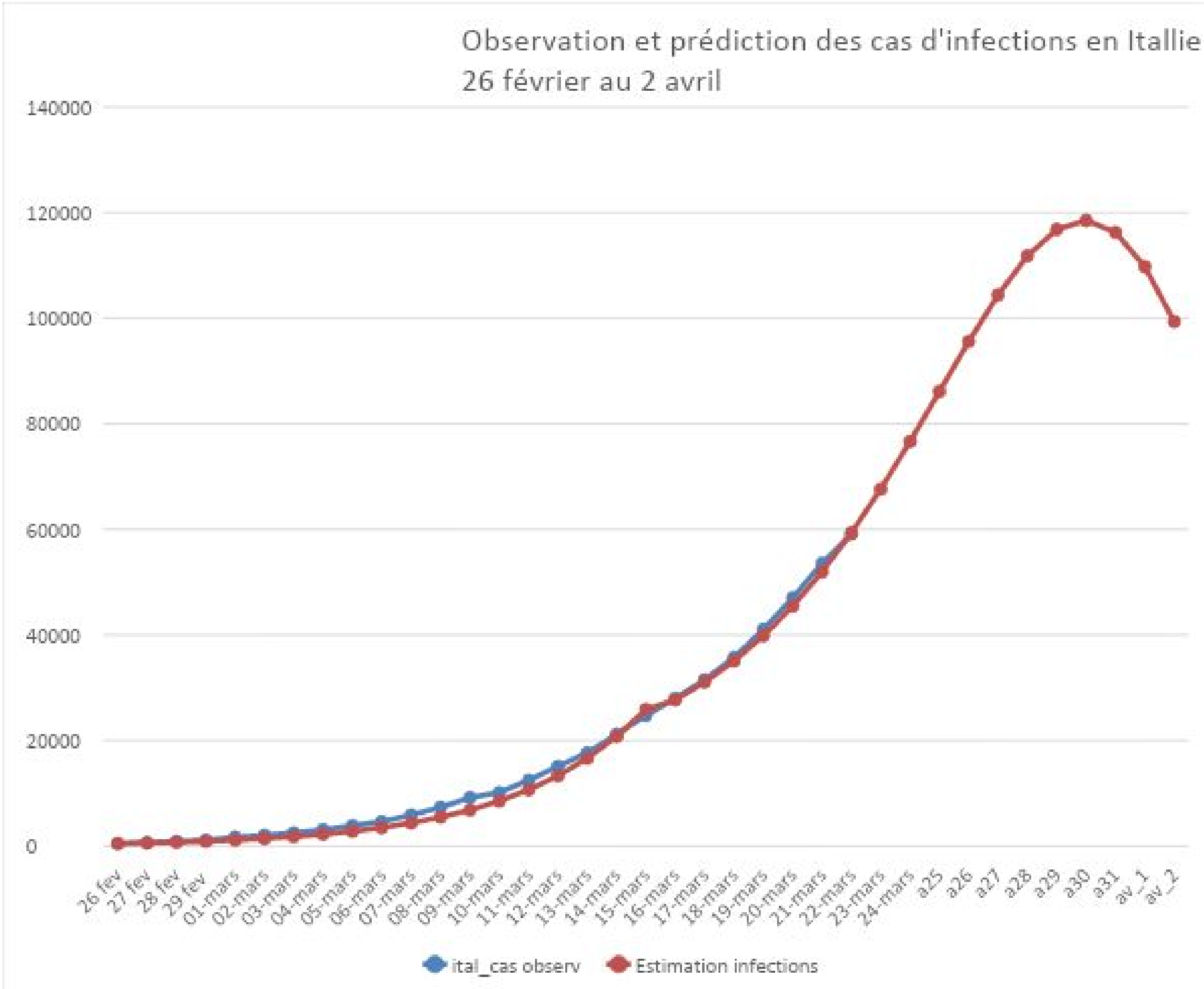
Pour estimer la dynamique épidémique, j'ai discrétisé le modèle issu des équations (1) et (2) :

St -St-1 = - b *S(t-1)*I(-1)
I(t) -I(t-1) = (b/N)*S(t-1) * I(t-1) -v* I(t)

$St = - b *S(t-1)*I(-1) + St-1$ (9)
$I(t) = (b/N)*S(t-1) * I(t-1)+ (1-v)* I(t-1)$ (10)

La population de la région fictive associée en pensée à la Lombardie est 10 millions, je considère que 90% set susceptible au début de l'épidémie et que le 26 février qui date l'irruption de l'épidémie on a observé/détecté 470 cas d'infection. J'ai pris pour valeur du taux de transmission par unité de temps b = 0.53, v =0.227 est l'inverse de la durée de contagiosité estimée entre 4 et 5 jours (j'ai pris des valeurs en variante autour de 1/5 ou ¼)
J'ai estimé que les dix-neuf premiers jours la pression de l'émotion ne modifie pas les comportements de sociabilité parce que les gens ne modifient pas immédiatement leur manière de vivre, il y a une inertie devant la menace collective et l'on ne suppose pas d'emblée d'action coercitive. Après cette date la pression du danger est intégrée avec le coefficient b' définit par l'équation (8) qui remplace b. Les gens s'auto-restreignent dans leurs interactions, ce qui sans masques et sans connaissance par des tests sur une masse importante des situations de suspicion d'infection empêche un évitement des risques circonstancié et limitant l'interruption de la vie sociale.
Le « poids des morts » intervient de façon importante, comme l'ont montré des travaux sur l'épidémie de 1918. les décès en Italie représentent 5%. Je l'ai formalisé en considérant un poids des morts de la période précédente en reprenant la formulation de Lin & al. qui est dynamique $(1-\frac{D(t)}{N})^k$: à mesure que le nombre de morts s'élève leur effet relatif diminue, ce qui e t pris en compte par la puissance k appliquée à la parenthèse (puisque la valeur de cette parenthèse est <1).

La simulation obtenue le 21 mars en regard des données italiennes a été réalisée avec R (je connais très mal ce langage, il y a sans doute mieux, mais…) sur la bases des relations de récurrence établies avec les équations (8, 9, 10).



Code R de l'estimation du modèle adapté de SIR et des remarques de Q Lin 2020 et al.

```
zz <-array(1:57, dim=c(19,3))
v=0.227
b=0.53
N=10000000
bc <- numeric()
s <-numeric()
i <-numeric()
s[1]=9000000;i[1]=470;bc[1]=b;
 zz[1,1]=9000000;zz[1,2]=470; zz[1,3]=b;
for(t in 2:19){s[t]<-s[t-1]-b*i[t-1]*(s[t-1]/N);i[t]<-((b/N)*i[t-1]*s[t-1])+(1-v)*i[t-1]; bc[t]<-
b*(1-(0.25*i[t-1]/N))^2000;zz[t,1]=s[t]; zz[t,2]=i[t];zz[t,3]=bc[t]}
zz
uu <-array(1:57, dim=c(19,3))
```

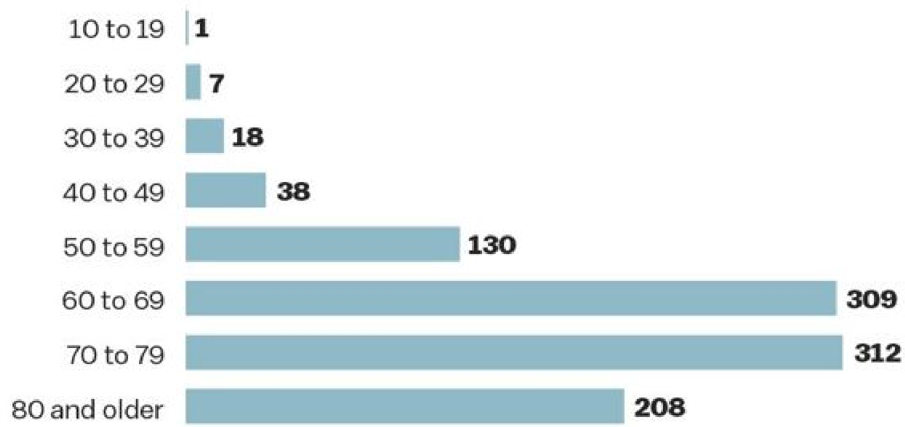
```
uu <-zz
uu[19,2] <- zz[19,2]-1000
uu
bc <- numeric()
s <-numeric()
i <-numeric()
#s[2]=uu[19,1];
#i[2]=uu[19,2];
s[1]=uu[19,1]; i[1]=uu[19,2];
uu

for (t in 2:19) {s[t]<-s[t-1]-(zz[t,3])*i[t-1]*(s[t-1]/N)
;i[t]<-((zz[t,3])/N)*(i[t-1])*s[t-1]+(1-v)*(i[t-1]-4000); uu[t,1]=s[t];uu[t,2]=i[t]}
print(uu)
```

Au risque de me tromper absolument, je ne suis aucunement expert, je vois un arrêt de la croissance du nombre des contaminations vers la fin du mois de mars. La France pourrait attendre 8 ou 9 jours de plus.

Cette modélisation suggère que les paramètres biologiques en tant que tels ne disent rien de la dynamique épidémique si l'on ne prend pas en compte les conduites de la population (et les actions publiques de confinement mais aussi de prise en charge et réassurance des gens en dehors même des guérisons. Elle montre d'abord que la dynamique épidémique change quand la peur de la mort intervient. Or les citoyens, nous tous, nous ne nous adaptons que tardivement, souvent le nez dans le mur (comme en matière de climat). Ce sont les morts ou les malades dans l'entourage proche, et la peur qu'ils produisent qui sont la source d'une réaction émotionnelle forte et induisent un changement des comportements. Certes, cela n'est pas nouveau, mais la crise actuelle pourrait être révélatrice de ce qu'en dépit de la hausse des niveaux d'éducation les comportements restent archaïques, le surmoi est moins actif semble-t-il que la peur (D/N ce n'est pas le surmoi). Les Lombards n'ont pas été désinvoltes, apparemment beaucoup moins que le Espagnols et sans doute que les Français dont la défiance par rapport aux consignes publiques est élevée.
Et contrairement à ce qui a été dit presque partout les restrictions des libertés ne font pas qu'aplatir la courbe, étaler dans le temps, elles diminuent de façon absolue le tribut de contaminations et de morts. Que de temps perdu, parce qu'on n'ose pas aborder ce fait que nous avons ont en toutes circonstances l'habitude de nous comporter de manière individualisée, sans pour autant en assumer pleinement les exigences. En outre du fait que plus que par le passé nos sociétés sont fragmentées, le politique largement dépourvu d'autorité, au sens qu'Arendt donne à ce mot, aucune légitimité n'autorise les dirigeants à suspendre ou à réduire les libertés publiques tant que la bateau n'est pas en passe de sombrer.

Annexe - Morts en Chine continentale (établie le 11 mars 2020)



Source: *The Epidemiological Characteristics of an Outbreak of 2019 Novel Coronavirus (COVID-19) – China, 2020,* China CDC