SciencesPo

Rapport de correction

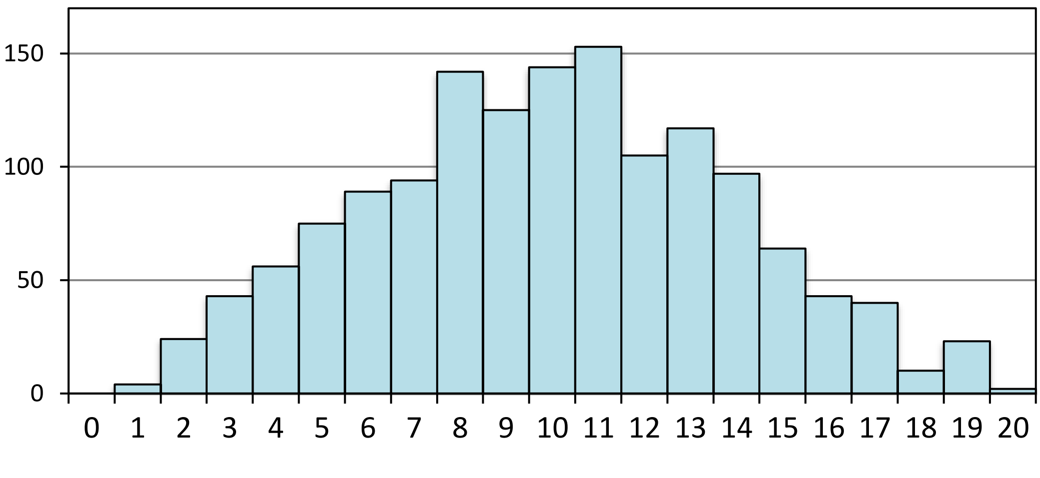
Epreuve de Mathématiques – Session 2019

Durée : 3 heures, coefficient : 2

Depuis la session 2013, le sujet est constitué d'un problème et d'un « Vrai – Faux ».
Cette année, le Vrai – Faux avec justification, noté sur 11 points, comprenait dix questions indépendantes, testant des connaissances et des compétences relatives à différents domaines du programme : pourcentages, analyse (suites et fonctions), probabilités, géométrie plane dans un repère.
Le problème, noté sur 9 points, consistait en l'étude d'une fonction faisant intervenir des logarithmes (limites, variations, courbe représentative, etc.) et d'une suite définie à l'aide de cette fonction par une relation de récurrence.

Les copies sont en général bien présentées. On relève d'appréciables progrès dans le soin apporté à la rédaction, avec notamment quelques efforts dans l'usage des quantificateurs.
Les correcteurs ont également noté que le raisonnement par récurrence semble mieux compris que les années passées.
Cependant le vocabulaire utilisé pourrait être plus précis et l'on relève par ailleurs quelques difficultés à mener correctement des calculs simples.

Les notes obtenues par les 1450 candidats ayant composé dans l'option Mathématiques se répartissent selon le graphique suivant. La moyenne est de 9,7 sur 20.



Vrai ou Faux

Le Vrai – Faux avec justification nécessite des connaissances étendues sur l'ensemble du programme et certaines compétences en matière de logique.
Les candidats qui souhaitent se préparer peuvent s'exercer en traitant par exemple les sujets des sessions précédentes.
Il est important de rappeler un principe essentiel : alors qu'il suffit de produire un contre-exemple pour prouver qu'une affirmation est fausse, il est indispensable de se placer dans le cas général pour démontrer qu'une proposition est vraie.

Question 1
Si cette question est assez bien réussie, on déplore que certains candidats additionnent les pourcentages alors qu'il s'agissait d'augmentations successives.
L'usage d'un coefficient multiplicateur pour traduire une augmentation, s'il n'est pas obligatoire, est fortement conseillé.

Question 2
Cette question a été mal réussie. Comme lors des précédentes sessions, de nombreux candidats ont du mal à fournir un contre-exemple correct. Beaucoup vont même jusqu'à répondre que l'affirmation est vraie.
Bien sûr, la recherche d'un contre-exemple doit se faire en veillant à respecter les hypothèses.
On pouvait aussi proposer une illustration graphique suffisamment convaincante.
Rappelons qu'une suite qui n'est pas croissante n'est pas nécessairement décroissante.

Question 3
Pour démontrer que cette proposition est vraie, il est nécessaire de faire une démonstration par récurrence. Pour bien rédiger celle-ci, il faut veiller à soigner l'initialisation en ne se contentant pas d'écrire l'égalité attendue sans la prouver et il est préférable de bien mettre en évidence la propriété à démontrer au rang n+1 afin d'éviter toute confusion.

Question 4
De nombreuses copies proposent une bonne utilisation du théorème des valeurs intermédiaires. Il était également possible de se ramener à la résolution d'une équation du second degré, sachant qu'une exponentielle transforme une somme en produit. Dans ce cas, il fallait prendre soin de déterminer au préalable l'ensemble de définition.

Question 5
Il n'était pas nécessaire de chercher l'équation des tangentes, les coefficients directeurs suffisant pour se prononcer sur le parallélisme. Par contre, on ne pouvait se contenter des valeurs arrondies de ces coefficients pour conclure.
Une méthode élégante et efficace consiste à remarquer que la fonction est impaire et que sa courbe représentative est par conséquent symétrique par rapport à l'origine du repère.

Question 6
Cette question prenant appui sur une situation concrète a été dans l'ensemble bien traitée, même si la locution « si et seulement si » n'a pas toujours été clairement justifiée.

Question 7
Environ la moitié des candidats a abordé cette question et l'a dans ce cas assez bien traité sauf quelques cas de recherche d'une primitive de f qui n'avait aucune chance d'aboutir ici.

Question 8
Pour répondre correctement à cette question élémentaire de probabilité, il convenait d'avoir bien compris la notion de « jeu équitable » (espérance de gain nulle) et de prendre en compte la mise initiale.
Comme dans la question 6, la proposition à démontrer était une équivalence ; on ne devait donc pas se contenter de prouver que le jeu est équitable lorsque $n = 25$.

Question 9
Une fois repérée la modélisation par une loi binomiale, il suffisait de bien mener les calculs pour valider la proposition.

Question 10
Plusieurs candidats écrivent que les points N et P sont alignés, sans s'interroger sur la signification de ce qu'ils écrivent. Mais cette question de géométrie plane un peu calculatoire a été souvent bien réussie par ceux qui l'ont abordée à quelques erreurs de calcul près.

Problème

Prendre le temps de lire l'intégralité du problème avant de s'attaquer à sa résolution peut permettre au candidat d'avoir une vision d'ensemble facilitant la prise de recul.

Partie A

Cette partie avait pour objet l'étude de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) + 1$ (dérivabilité, variations, position par rapport à la tangente en 1).
Portant sur des connaissances de base du programme de l'examen elle a été très bien réussie dans bon nombre de copies.
Des justifications claires sont attendues dans le calcul des limites. Des affirmations telles que « on voit que » ou « on sait que » ne peuvent tenir lieu d'arguments et laissent craindre que le candidat n'est pas en mesure de justifier certains résultats.
Le résultat étant donné, le calcul de la dérivée était facile et a été bien réussi. L'étude de son signe ne présentait pas non plus de difficulté, sauf pour ceux qui croient qu'un logarithme est toujours positif.
Le minimum devait bien être donné sous forme d'une valeur exacte.
Une certaine rigueur est attendue dans l'usage des notations. Ainsi, il ne faut pas confondre le nom donné à la droite (Δ) et l'équation de celle-ci. Écrire $\Delta = x$ n'a aucun sens de même que considérer $C_f - \Delta$.
Dans cette partie le recours à une calculatrice a sans doute permis à certains candidats de conjecturer la réponse attendue ou de vérifier leur réponse après coup.

Partie B

Cette partie visait à étudier l'équation $f(x) = 2$.
La question 1 se faisait à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires en se plaçant sur des intervalles bien choisis.
La réponse à la question 2 résultait directement de la question A5c.
Dans la question 3 un travail était nécessaire après la résolution de l'équation pour déterminer l'intervalle solution.
Alors que l'algorithmique fait partie des programmes du lycée depuis plusieurs années, peu de candidats abordent la question 4. La plupart de ceux qui s'y sont engagés proposent une méthode par balayage plutôt que par dichotomie. Les candidats qui souhaitent se préparer efficacement ont intérêt à fournir en amont un effort dans ce domaine.

Partie C

Dans une forme de généralisation de la partie précédente, la partie C amenait à considérer la suite de solution de l'équation $f(x) = n$ lorsque n parcourt l'ensemble des entiers naturels non nuls.
De nombreux candidats ont visiblement du mal à concevoir une suite définie de manière implicite, c'est-à-dire dont ils ne connaissent pas l'expression, de sorte que la question 3 a été très mal réussie. La croissance de la suite ne pouvait être déduite directement de la croissance de la fonction *f*, mais un raisonnement par l'absurde permettait de conclure. On pouvait procéder de même pour prouver que la suite n'est pas majorée.
Il n'y a pas *a priori* de raison que la suite tende vers $+\infty$ parce que la fonction *f* tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
La question 5 a été souvent bien traitée en appliquant le théorème qui convient.

Partie D

Il s'agissait dans cette partie d'étudier une suite définie par une relation de récurrence à partir de la fonction *f*.
Un traitement rigoureux de la question 1 appelait une démonstration par récurrence.
Encore une fois on relève des confusions entre les variations de la suite et celles de la fonction (question 2). Si l'une et l'autre sont liées, on ne peut prétendre qu'elles soient toutes les deux croissantes sans faire un raisonnement.
Compte tenu du tableau de variation de *f* établi dans la partie A, la question 3a exigeait une disjonction de cas selon l'intervalle considéré.
Le théorème selon lequel toute suite croissante et majorée converge, qui suffit pour répondre à la question 3b, est visiblement bien connu des candidats.