SciencesPo

Admission au Collège universitaire - Session 2019
Copie épreuve de Mathématiques
(Coefficient 2)

Exercice vrai ou faux

1) Considérons un prix, noté k avant mai 2018.

À l'issue des trois mois, il vaut :

$k' = 1{,}004 \times 1{,}021 \times 1{,}0745\, k \approx 1{,}101\, k$

L'augmentation est supérieure à 10 % car $k' > 1{,}1\, k$

Affirmation fausse

2) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n + 2\cos n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos n \geq -1$, d'où $u_n \geq n - 2$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$, donc par le théorème de comparaison, (u_n) tend vers $+\infty$.

Pourtant, $u_1 \approx 2{,}08$ et $u_2 \approx 1{,}17$, donc (u_n) n'est pas croissante sur $\mathbb{N}$.

Affirmation fausse

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n : "$u_n = 3^n + n - 1$", montrons par récurrence que P_n vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $3^0 + 0 - 1 = 0 = u_0$, donc P_0 est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n vraie

On a $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

$= 3(3^n + n - 1) - 2n + 3$ par hypothèse

$= 3^{n+1} + 3n - 3 - 2n + 3$

$= 3^{n+1} + (n+1) - 1$

donc P_{n+1} vraie

Conclusion : par principe de récurrence, P_n vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

4) $\ln(4x+5)$ calculable si et seulement si $x > -\frac{5}{4}$

$\ln(x+1)$ calculable si et seulement si $x > -1$

On résout l'équation sur $D =]-1 ; +\infty[$

$\ln(4x+5) + \ln(x+1) = 1$

$\iff (4x+5)(x+1) = e^1$ par stricte croissance de exp

$\iff 4x^2 + 4x + 5x + 5 = e$

$\iff 4x^2 + 9x + 5 - e = 0$, équation du second degré

$\Delta = 9^2 - 4 \times 4(5-e) = 81 - 80 + 16e$

$= 1 + 16e > 0$

$x_1 = \dfrac{-9-\sqrt{1+16e}}{8} < -1$ $\qquad x_2 = \dfrac{-9+\sqrt{1+16e}}{8} \geqslant -1$

$x_1 \notin D$, donc il n'y a qu'une solution qui est x_2.

Affirmation fausse

5) Vérifier que d_1 et d_2 sont parallèles revient à vérifier qu'elles ont même pente, donc que $f'(-1) = f(1)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et on a :

$f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2x \times e^{x^2}$

$= e^{x^2}(2x^2+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $f'(-1) = e^{(-1)^2}(2(-1)^2+1) = e(2+1) = 3e$

$f'(1) = e^{1^2}(2 \times 1^2 + 1) = 3e$

Ainsi, $f'(1) = f'(-1)$, donc d_1 et d_2 parallèles

Affirmation vraie

6) On note $g(x)$ le temps de trajet suivant x.

$g(x) = \frac{16}{80} + \frac{40}{50} + \frac{5}{x}$ car le temps est égal à la distance sur la vitesse

$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{5}{x}$

$= 1 + \frac{5}{x}$

Ainsi, le cycliste est à l'heure si et seulement si $g(x) \leqslant 1{,}5$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{5}{x} \leqslant 1{,}5$

$\Leftrightarrow \frac{5}{x} \leqslant 0{,}5$

$\Leftrightarrow 5 \leqslant 0{,}5\,x$ car $x > 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 10$

Affirmation vraie

7) On sait que $f^2(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or, $f(1) = 0$, donc $\forall x < 1,\ f(x) < 0$ et $\forall x > 1,\ f(x) > 0$.

En particulier, $f(x) < 0 \quad \forall x \in [-1;0]$.

Affirmation fausse

8) On note X la variable aléatoire donnant le gain.

Loi de probabilité de X :

x_i	9	4	-1	car on mise un euro
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{n-4}{n}$	

Ainsi, $E(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i \times p(X=x_i)$

$= \frac{9}{n} + \frac{12}{n} - \frac{n-4}{n}$

$= \frac{25-n}{n}$

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X)=0$.

$E(X)=0 \iff \frac{25-n}{n} = 0$

$\iff 25-n=0$

$\iff \underline{n=25}$

Affirmation vraie

9) Le lancer de la pièce est une épreuve de Bernoulli ayant 2 issues : le succès S « PILE » de probabilité $p = \frac{1}{3}$ et l'échec $\bar{S}$.
La répétition à l'identique et indépendante de cette épreuve constitue un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire Y, qui compte le nombre de PILE, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = \frac{1}{3}$.

L'événement « exactement 10 PILE » est $Y = 5$.
Et $p(Y = 5) = \binom{15}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

$\approx 0,21 > 0,2$

Affirmation vraie

10) Coordonnées de M : $\overrightarrow{DM} = -2\overrightarrow{BD} \iff \begin{cases} x_M - 1 = -2 \times -3 \\ y_M - 2 = -2 \times 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_M = 7 \\ y_M = 0 \end{cases}$ en posant $M(x_M ; y_M)$.

Coordonnées de $N(x_N ; y_N)$: $\overrightarrow{CN} = 5\overrightarrow{CA}$

$\iff \begin{cases} x_N - 4 = 5(-3) \\ y_N - 2 = 5(-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x_N = -11 \\ y_N = -3 \end{cases}$

Coordonnées de $P(x_P ; y_P)$: $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{AB}$

$\iff \begin{cases} x_P - 4 = 3 \times 3 \\ y_P - 1 = 3 \times 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_P = 13 \\ y_P = 1 \end{cases}$

Ainsi, $M(7 ; 0)$, $N(-11 ; -3)$ et $P(13 ; 1)$.

$\det(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{MP}) = \begin{vmatrix} -18 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires.

Donc les points M, N et P sont alignés.

Affirmation vraie

Problème :

Partie A

1) Limite en 0 : par croissances comparées, on a

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, d'où par somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Limite en $+\infty$: on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc

par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$.

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) f est dérivable sur I et on a

$f'(x) = (x \ln x)' + 0$

$= 1 \ln x + x \times \frac{1}{x}$

$f'(x) = 1 + \ln x \quad \forall x \in I$

3) Étudions le signe de f'.

$f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \frac{1}{e}$ par stricte croissance de exp

de même : $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$

On obtient le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
Signe $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ 1	↘	$\frac{e-1}{e}$	↗	$+\infty$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1$

$= \frac{1}{e}(0-1)+1$

$= -\frac{1}{e}+1$

$= \frac{e-1}{e}$

f est strictement croissante sur $]0\,;\frac{1}{e}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{e}\,;+\infty[$, donc elle admet un minimum en $\frac{1}{e}$ qui vaut $\frac{e-1}{e}$.

4) L'équation de Δ est, par propriété :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= (1+\ln 1)(x-1) + (1 \times \ln 1 + 1)$

$= x - 1 + 1$

$= x$

L'équation est $y = x$.

5) a) g est dérivable sur I en tant que somme de fonctions dérivables et on a :

$g'(x) = f'(x) - 1$

$= 1 + \ln x - 1$

$g'(x) = \ln x \quad \forall x \in I$

On obtient le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(1) = f(1) - 1$

$= 1 \ln 1 + 1 - 1$

$= 0$

b) g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, donc admet un minimum en 1 qui vaut 0.

Ainsi, $g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

et $g(x) = 0$ pour $x = 1$

c) $g(x)$ est la différence des ordonnées de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

Ainsi, on obtient le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe $g(x)$		$+$	0	$+$	
Position relative $\mathcal{C}_f$ et Δ		$\mathcal{C}_f$ au-dessus de Δ	$\mathcal{C}_f$ et Δ se coupent	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de Δ	

Partie B

1) • f est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{e}]$ et $\lim_{0^+} f = 1$, donc $\forall x \in]0; \frac{1}{e}]$, $f(x) \leqslant 1 < 2$ ①

• f est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$, continue car dérivable et prend ses valeurs dans $[\frac{e-1}{e}; +\infty[$, qui contient 2 car $\frac{e-1}{e} \approx 0,63$.

donc, d'après le théorème de la bijection, $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[\frac{1}{e}; +\infty[$. ②

Donc, d'après ① et ②, il y a bien une unique solution α de $f(x) = 2$ dans I.

2) On sait que $f(\alpha) = 2$

$\Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + 1 = 2$

$\Leftrightarrow \alpha \ln \alpha = 1$

Par l'absurde, on suppose $\alpha > 2$.

Comparez $f(\alpha)$ à $f(2)$.

3) a) On a $\alpha^2 - \alpha \geqslant 1 \iff \alpha^2 - \alpha - 1 \geqslant 0$, polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 (-1) = 5$.

$\alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

Le coefficient du terme en α^2 étant positif, et puisque $\alpha > 0$, on a donc $\alpha^2 - \alpha - 1 \geqslant 0 \iff \alpha \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, $\underline{\alpha \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

b) D'après la question 3) a), $\alpha \geqslant 1,6$ car $\alpha_2 \simeq 1,62$.
À l'aide de la calculatrice et de la méthode dite « de balayage », on constate que $\alpha \leqslant 1,8$.
Finalement, $\underline{1,6 \leqslant \alpha \leqslant 1,8}$.

4) On peut faire appel à l'algorithme de dichotomie suivant :

```
A ← 1,6
B ← 1,8
Tant que   B − A ≥ 10^-3, faire
    M ← (A+B)/2
    Si  f(M) < 2  alors
        A ← M
    Sinon
        B ← M
    Fin Si
Fin Tant que
Afficher  A et B
```

Les valeurs en sortie sont un encadrement de α : $A \leqslant \alpha \leqslant B$

Partie C

1) • On a établi à la question 1 de la partie précédente que $\forall x \in]0; \frac{1}{e}]$, $f(x) < 1$. Or, $n \geqslant 1$, donc pas de solution de $f(x) = n$ dans cet intervalle

• f est strictement croissante sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$, continue car dérivable et prend ses valeurs dans $[\frac{e-1}{e}; +\infty[$, qui contient n car $n \geqslant 1$ et $\frac{e-1}{e} \approx 0,63$.
donc, une unique solution dans cet intervalle par le théorème de la bijection.

Finalement, il y a une unique solution α_n de $f(x) = n$ dans I.

2) $f(x) = 1 \iff x \ln x = 0$

$\iff \ln x = 0$ car $x > 0$

$\iff x = 1$

donc $\alpha_1 = 1$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f(\alpha_n) = n$ et que $f(\alpha_{n+1}) = n+1$. Ainsi, $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$. Par stricte croissance de f, on en déduit : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$
(α_n) est donc strictement croissante.

4) Supposons (α_n) majorée par M.
On a $\alpha_n \leqslant M$

$\iff f(\alpha_n) \leqslant f(M)$ par stricte croissance de f

Or, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc quelque soit le réel $f(M)$,

on pourra trouver α_n tel que $f(\alpha_n) > f(M)$.
Cela mène à une contradiction : (α_n) n'est pas majorée

5) D'après les deux questions précédentes, quel que soit le réel A, on trouvera un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\alpha_n \geqslant A$.
Par définition, (α_n) diverge vers $+\infty$.

Partie D

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n : " $u_n = 1$ ".

Montrons par récurrence que P_n vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 1$, donc

P_0 est vrai.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n vrai.

$u_{n+1} = f(u_n)$

$= f(1)$ par hypothèse de récurrence

$= 1 \times \ln 1 + 1$

$= 1$, donc P_{n+1} vrai.

Conclusion : par principe de récurrence, $u_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, (u_n) est constante si $u_0 = 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$.

Or, la fonction g est positive sur I (question 5 b), donc

$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$.

(u_n) est bien croissante sur $\mathbb{N}$.

3) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n : « $0 < u_n < 1$ ».

Montrons par récurrence que P_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 \in]0;1[$, donc P_0 vrai

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n vrai.

Alors $0 < u_n < 1$ par hypothèse

Or, f admet un minimum qui vaut $\frac{e-1}{e}$,

donc $f(u_n) \geqslant \frac{e-1}{e} > 0$, d'où $u_{n+1} > 0$. ①

de plus, f est strictement décroissante puis croissante

sur $]0;1[$ et $\lim\limits_{0^+} f = f(1) = 1$, donc

$\forall x \in]0;1[$, $f(x) < 1$.

Et ici en particulier, $u_{n+1} < 1$ ②

donc P_{n+1} vrai d'après ① et ②.

Conclusion : par principe de récurrence, P_n vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

b) On a montré que (u_n) est croissante (question 2) et majorée (question 3.a). Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel l.

c) l est solution de $f(x) = x$, résolvons cette équation.

$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

$\iff g(x) = 0$

Or, d'après la question 5)b) de la partie A, pour $x \in I$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.

Ainsi, $l = 1$ et (u_n) converge vers 1.