

Admission au Collège universitaire - Session 2018 Copie épreuve de Mathématiques (Coefficient 2)

Problème

Partie A:

f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur]0, +∞[

$$\text{A1) On a } f(x) = (ax^2 + \frac{b}{x} - (\ln(x))^2)'$$

$$= (ax^2)' + \left(\frac{b}{x}\right)' + (-(\ln(x))^2)'$$

On, $\frac{b}{x}$ est de la forme $\frac{k}{u(x)}$ avec $k=b$ et $u(x)=x$

D'où $\left(\frac{b}{x}\right)'$ est de la forme $-\frac{k u'(x)}{(u(x))^2}$ *TB*

ici, on a donc $-\frac{b \cdot 1}{(x)^2} = -\frac{bx}{x^2} = -\frac{b}{x}$

De même, $(\ln(x))^2$ est de la forme $(u(x))^n$ avec $n=2$ et $u(x)=\ln(x)$

D'où, $((\ln(x))^2)'$ est de la forme $n(\ln(x))^{n-1} \cdot u'(x)$, soit :

$$2 \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^1 = \frac{2 \ln(x)}{x}$$

On a alors $f'(x) = \underline{2ax - \frac{2b}{x^2} - \frac{2 \ln(x)}{x}}$ *$\forall x > 0$*

2) D'après l'énoncé, on a $f(1) = 0,5$ et $f'(1) = 0$

car la tangente est horizontale et a donc pour coefficient directeur $f'(x)$.

$f'(1) = 0$ équivaut donc à $2a \cdot 1 - \frac{2b}{(1)^2} - \frac{2 \ln(1)}{1} = 0$

$$\Leftrightarrow 2a - 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = 2b$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

De plus, $f(1) = 0,5 \Leftrightarrow a \cdot 1^2 + \frac{b}{1^2} - (\ln(1))^2 = 0,5$.

oui. $\Leftrightarrow a + b = 0,5$

$\Leftrightarrow a + a = 0,5$ (car $a = b$)

$\Leftrightarrow a = 0,25$.

Ainsi, on a donc $a = b = 0,25$

Partie B:

B) 1) $2x^2 - 4x + 2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2$

D'où, en posant $x^2 = X$, $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2X^2 - 4X + 2$
 $= (\sqrt{2}X - \sqrt{2})^2$
 $= (\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2})^2$

2) Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, (\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2})^2 \geq 0$, ce qui équivaut à $2x^4 - 4x^2 + 2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ oui

Partie C:

C) 1) On a $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln(x)$

D'où, $g'(x) = 2x - \frac{-2x}{(x^2)^2} - 4 \cdot \frac{1}{x}$ (g est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$)
 $g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$

$g'(x) = \frac{1}{x^3} (2x^4 - 4x^2 + 2)$ oui

Or, d'après la partie B, $2x^4 - 4x^2 + 2 \geq 0$.

De même, on est sur l'intervalle $]0; +\infty[$, soit $x > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > 0$ oui.

Ainsi, $g'(x) \geq 0$ d'où $g(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$. oui.

$$c) 2) g(1) = 1^2 - \frac{1}{1^2} - 4 \ln(1) = 0 \quad \checkmark$$

D'où, $g(x)$ étant croissante sur $]0; +\infty[$
strictement

ah? cette propriété, nécessaire, n'a pas été justifiée jusqu'ici.

$$\begin{aligned} \text{pour } x < 1, g(x) < 0 \\ \text{pour } x = 1, g(x) = 0 \\ \text{pour } x > 1, g(x) > 0 \end{aligned}$$

Partie D:

$$\begin{aligned} D) 1) f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2}} - (\ln(1) - \ln(x))^2 \quad \text{TB} \\ &= \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4} x^2 - (0 - \ln(x))^2 \quad \checkmark \\ &= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2 \quad \checkmark \quad (\text{car } (\ln(x))^2 = (-\ln(x))^2) \\ &= f(x) \quad \forall x \in \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) a) f(x) &= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2 \\ &= x^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2} \right) \quad \checkmark \\ &= x^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Or, par comparaisons comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

D'où, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right) = \frac{1}{4}$
et par produit

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Par produit, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$b) \text{ De même, } f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} - x^2 (\ln(x))^2 \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} - (x \ln(x))^2 \right)$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$

D'où, par produit et par somme,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} - (x \ln(x))^2 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \checkmark$$

Par produit, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

3) D'après la question A)1), on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2x^3} - 2 \frac{\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{2x} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln(x) \right)$$

$$= \frac{1}{2x} g(x)$$

Or, $\frac{1}{2x} > 0$ pour $x \in]0; +\infty[$. $\checkmark$

$f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$ $\checkmark$

Or, $g(x) < 0$ pour $x < 1$, d'où, $f'(x) < 0$ pour $x < 1$
Et, $g(x) > 0$ pour $x > 1$, d'où, $f'(x) > 0$ pour $x > 1$

Ponc, pour $x \in]0; 1[$, f est ^{strict} décroissante, et,
pour $x \in]1; +\infty[$, f est ^{strict} croissante.

Partie E:

$$E) 1) h(x) = f(x) - x \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - f(x) - x$$

Ainsi, $h'(x) = f'(x) - 1$ (h est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables)

Or, pour $x \in]0; 1[$, $f'(x) < 0$

Soit, $f'(x) - 1 < 0$

Et donc $h'(x) < 0$

NB

h est donc ^{strictement} décroissante sur $]0; 1[$. ✓

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - x) = +\infty$$

$$\text{Enfin, } h(1) = f(1) - 1 = 0,5 - 1 = -0,5.$$

Oui

h étant continue et strictement décroissante sur

$]0; 1[$ et 0 étant compris dans l'intervalle

image $]h(0); h(1)[$, d'après le corollaire du

théorème sur les valeurs intermédiaires, il existe

une unique solution α telle que $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ ✓

$$2) \text{ On pose } h(x) = f(x) - \frac{1}{x^2}$$

Réolvons $h(x) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) + \frac{1}{x^3}$$

(h est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $]1; +\infty[$)

Or, $f(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ d'après la question D)3) et $\frac{1}{x^2} > 0$ pour $x > 1 > 0$

D'où $h'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 1} h(1) = -\frac{1}{2} \text{ et } h(2) > 0 \quad \checkmark$$

Par une démonstration analogue au E)1), on en déduit qu'il existe une unique solution β sur $]1; +\infty[$

3) On a $f(x) = x$ et $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$, ce qui est vrai respectivement pour x et β .

$$\text{D'où, } \alpha \times \beta = f(\alpha) \times \frac{1}{f(\beta)} = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \frac{f(\alpha)}{f(\frac{1}{\alpha})}$$

voir que $\frac{1}{\beta}$ est racine de $f(x) = x$

sur $]0; 1]$, tout comme α (racine unique!)

4) a) 0,1 $\rightarrow$ A

1 $\rightarrow$ B

While B - A $> 10^{-2}$

If $f(\frac{A+B}{2}) > \frac{A+B}{2}$

Then $\frac{A+B}{2} \rightarrow A$

Else $\frac{A+B}{2} \rightarrow B$

If End

While End

A =

B =

(légende :

$\rightarrow$ donner la valeur

While : Tant que

If : Si

Then : Alors

Else : Sinon

If end : Fin Si

While End : Fin Tant que

$\bullet$: afficher)

b) Un encadrement de α est $0,54 \leq \alpha \leq 0,55$. TB.

Exercice Vrai-Faux

1) Une augmentation annuelle de 3% d'un capital noté u_0 correspond à une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison 1,03. Ainsi, le capital au bout d'une année n peut s'exprimer selon la suite (u_n) :

$$u_n = u_0 \times (1,03)^n$$

Au bout de 20 ans, on a ainsi:

$$u_{20} = u_0 \times (1,03)^{20} = u_0 \times 1,806 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Or, pour que le capital initial soit doublé au bout de 20 ans, il aurait fallu qu'il soit multiplié par 2 ou plus.

Néanmoins, $1,806 < 2$, le capital n'a donc pas encore doublé.

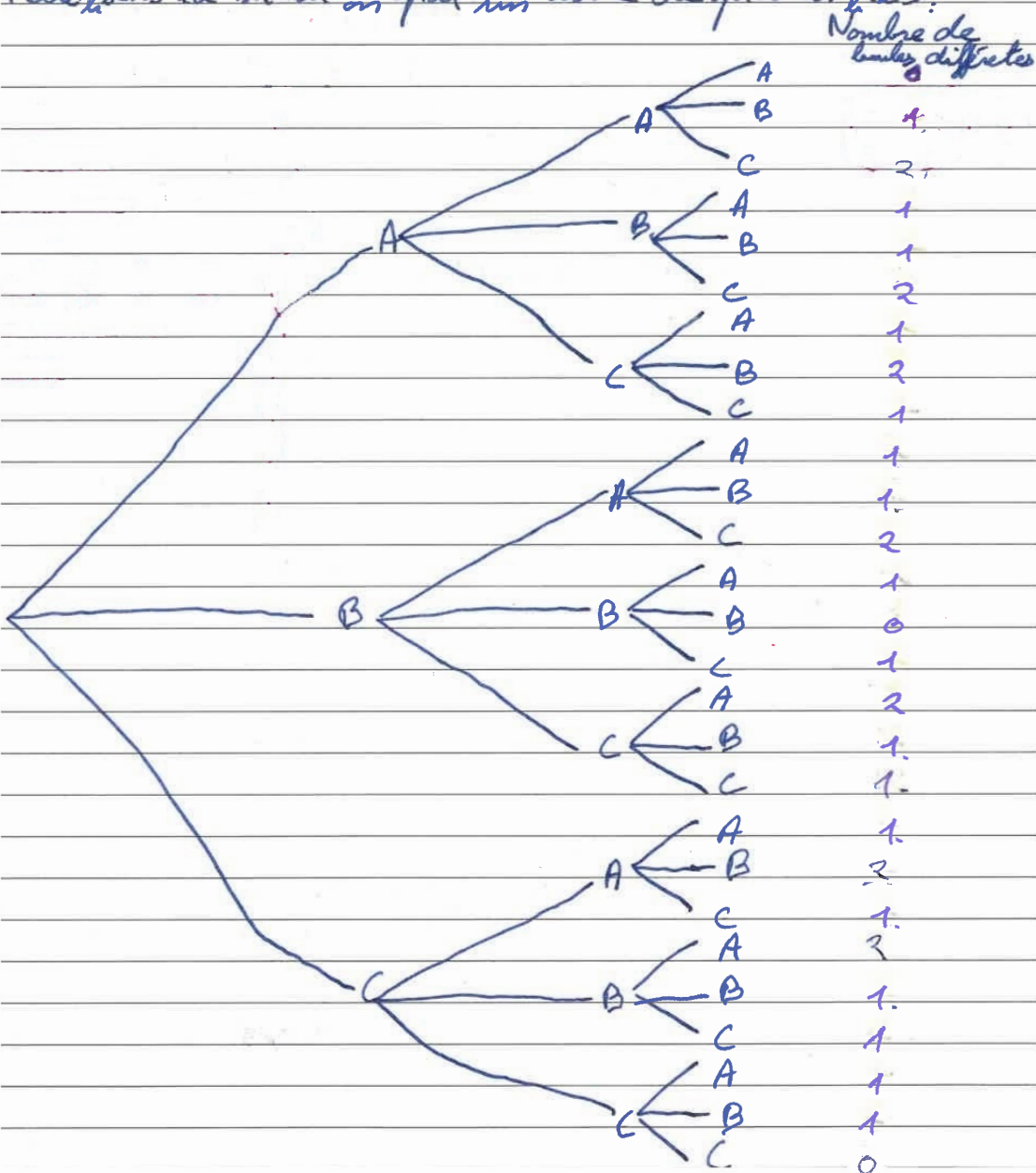
C'est donc FAUX.

2) On note A l'événement : "tirer une boule numérotée 1"

On note B l'événement : "tirer une boule numérotée 2"

On note C l'événement : "tirer une boule numérotée 3"

Modélisons la situation par un arbre de probabilités :



On a alors la loi de probabilités suivante:

n_i	0	1	2
$P(N=n_i)$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{18}{27}$

$$\text{De plus, } E(N) = \sum_{k=0}^2 n_i \times p_i = 0 \times \frac{3}{27} + 1 \times \frac{6}{27} + 2 \times \frac{18}{27} \\ = \frac{23}{9} \approx 2,56 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$2,56 > \frac{3}{2}$. Donc c'est VRAI ou

3) Cette situation correspond à la répétition de 100 épreuves identiques et indépendantes; le choix d'un véhicule, de succès: le véhicule est défectueux et d'échec: le véhicule est conforme de probabilité 0,03
probabilité 0,97.

Cela correspond à une loi binomiale de paramètres

$(100; 0,03)$.

On a alors $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ (ici, $n=100$, $k=0$ et $p=0,03$)

$$\text{D'où, } P(X=0) = \binom{100}{0} \times 0,03^0 \times (1-0,03)^{100}$$

$$= 1 \times 1 \times (1-0,03)^{100} = (1-0,03)^{100} \quad \checkmark$$

Or, d'après les règles d'opérations, $1-0,03^{100} \neq (1-0,03)^{100}$

C'est donc FAUX. $\checkmark$

4) On a $u_1 = 2 + 2 = 4$, $u_2 = 2 + 2 + 2^2 = 8$ et $u_3 = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 = 16$

D'où, $v_1 = u_1 - 1 = 3$, $v_2 = u_2 - 1 = 7$, $v_3 = u_3 - 1 = 15$.

Or, $\frac{v_2}{v_1} = \frac{7}{3}$ et $\frac{v_3}{v_2} = \frac{15}{7} \neq \frac{7}{3}$. (v_n) n'est donc pas géométrique.

De plus, $\sum_{k=1}^n 2^k$ peut s'écrire sous la forme :

$$2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2.$$

d'après les formules de somme pour les suites géométriques ($S_n = u_1 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ avec u_1 le premier terme et q la raison).

Oui

D'où, $u_n = 2 + \sum_{k=1}^n 2^k = 2 + (2^{n+2} - 2) = 2^{n+2}$

u_n est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 2$.

Il n'y a donc bel et bien qu'une seule suite géométrique parmi les 2.

C'est donc VRAI.

$$5) \text{ On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{n}$$

$$\text{Or, } \forall l \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{n} = 0$$

$$\text{D'où, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{n} = 0$$

C'est donc VRAI

6) On raisonne par récurrence. ✓

Prenons $P(n)$ la propriété: " $u_n = n+1$ " ✓

Initialisation.

$$\text{Pour } n=0: P(0): u_0 = 0+1 = 1$$

Pour, $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est initialisée pour $n=0$

Hérédité:

On pose k un entier naturel quelconque fixé.

On suppose $P(k)$ vraie, à savoir $u_k = k+1$

Montrons $P(k+1)$ vraie, soit $u_{k+1} = (k+1)+1 = k+2$ ✓

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{k+1} &= 10 u_k - 9k - 8 = 10(k+1) - 9k - 8 \\ &= 10k + 10 - 9k - 8 \\ &= k+2 \end{aligned}$$

$P(k+1)$ est donc vraie.

$P(n)$ est alors initialisée pour $n=0$ et héréditaire.

Par assomme de récurrence, $P(n)$ est vraie
 $\forall n \in \mathbb{N}$. C'est donc VRAI. TB.

7) On pose $f(x) = x+1$ et $g(x) = x$

On a donc bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Et aussi $f(x) > g(x)$ car $x+1 > x \forall x \in \mathbb{R}$. ✓

Toutefois, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1-x)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ ✓

C'est donc faux.

$$8) \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1+\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2}$$

$$= \frac{2(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1} \times \frac{1}{\frac{(e^{2x}+1)^2 + (e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}}$$

$$= \frac{2(e^{2x}-1) \times (e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1) \times ((e^{2x}+1)^2 + (e^{2x}-1)^2)} \quad \text{Oui}$$

$$= \frac{2(e^{2x}-1) \times (e^{2x}+1)}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1 + e^{4x} - 2e^{2x} + 1} \quad \checkmark$$

$$= \frac{2(e^{4x}-1)}{2e^{4x}+1} = \frac{e^{4x} \cdot 1}{e^{4x}+1} = \frac{e^{2x \times 2} - 1}{e^{2x \times 2} + 1} = f(2x)$$

C'est donc VRAI. ✓

9) D'après la relation fondamentale de la

trigonométrie, on a : $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ (avec $0 < \theta < 2\pi$)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

Ici, pour $\theta = \frac{7\pi}{12}$, on a alors :

$$\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 \quad \text{oui}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 + 1 = \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6} + 6}{16} = \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{16} = \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \quad \text{car } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0 \text{ et } \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < 0 \quad \checkmark$$

C'est donc VRAI.

10) Dans le cas où $a = 1$, $A(1; 1)$.

Ainsi (OA) a pour équation $y = x$

La perpendiculaire à (OA) a alors un coefficient directeur opposé à (OA). Elle est donc d'équation $y = -x$.

Or, le second point d'intersection entre la parabole et cette droite est l'origine.

Ainsi, $B(0; 0)$

D'où, (AB) est pour équation $y = x$.

$$\text{y} = 1$$

Or, K ne vérifie pas cette équation car $1 \neq 0$. Il n'appartient donc pas à (AB). C'est donc FAUX.

