CORRIGÉ

Épreuve à Option

Mathématiques

(Coefficient 2)

Eléments de correction de l'épreuve de mathématiques

Sciences Po Session 2014

Exercice Vrai/Faux

1. **Vrai.** Raisonnement par récurrence
Initialisation : $u_1 = \frac{34}{5} < u_0$
Hypothèse de récurrence : on suppose que pour un entier *n*, $u_{n+1} < u_n$
Alors, puisque pour tout entier *n*, $u_n \geq 0$, $\frac{3}{5}u_{n+1} < \frac{3}{5}u_n$, puis $\frac{3}{5}u_{n+1} + 8 < \frac{3}{5}u_n + 8$, soit $u_{n+2} < u_{n+1}$: la propriété est vérifiée au rang *n*+1
Conclusion : pour tout entier *n*, $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante.

2. **Faux.** Contre exemple
Pour $n > 0$, $u_n = \frac{-1}{n}$ est le terme général d'une suite croissante et majorée par 0, mais la suite de terme général $u_n^2 = \frac{1}{n^2}$ est décroissante.

3. **Vrai**. La fonction *f* est un polynôme du second degré de la forme $a\,x^2 + b\,x + c$, avec $a = 1 > 0$. Elle admet donc un minimum en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2}$, qui vaut $f\left(\frac{-b}{2}\right) = -\frac{b^2}{4} + 4 \leq 4$ puisque $-\frac{b^2}{4} \leq 0$ $(b^2 \geq 0)$.

4. **Faux.** On multiplie les 2 membres de l'équation par e^x :
$e^{2x} - 2 = -e^x \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$ en posant $e^x = X$.
Le discriminant de l'équation du second degré en *X* vaut 9 donc l'équation a deux solutions $X_1 = -2$ et $X_2 = 1$.
L'équation $e^x = X_1 = -2$ n'a pas de solution car $e^x > 0$ et l'équation $e^x = X_2 = 1$ équivaut à $x = 0$. Donc l'équation initiale n'a qu'une solution réelle.

5. **Vrai.** Equation de la tangente en 1 à la courbe représentative de *f* définie par $f(x) = \ln x$:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1(x - 1) + 0 = x - 1$$

Pour $x > 0$, on pose $g(x) = f(x) - (x - 1) = \ln x - x + 1$.
Alors $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.
$g'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$ et $g'(x) < 0$ pour $x > 1$.
Donc la fonction *g* admet un maximum en $x = 1$ où elle vaut $g(1) = 0$.
Ainsi $g(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$ donc $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ ce qui signifie que la courbe représentative de la fonction logarithme népérien est toujours au-dessous de sa tangente en 1.

6. **Vrai.** Soit *X* le nombre de rondelles défectueuses, *X* suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{100}$.
On cherche $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.03)^{10} \approx 0{,}263$.

7. **Faux.** Le gain G est égal à la somme des gains obtenus pour chacun des 20 tirages.
On peut donc écrire : $E(G) = E(G_1 + G_2 + \cdots + G_{20}) = E(G_1) + E(G_2) + \cdots E(G_{20})$ par linéarité de l'espérance.
Or les tirages s'effectuant avec remise, on a :

$$E(G\_1) = E(G\_2) = \cdots = E(G\_20) = 2 \times \frac{10}{14} - 3 \times \frac{4}{14} = \frac{4}{7}$$

et

$$E(G) = 20E(G_1) = 20 \times \frac{4}{7} = \frac{80}{7}.$$

8. **Faux.** On suppose que le repère est orthonormé.
Alors AB = $\sqrt{17}$, AC = 5 et BC = $\sqrt{10}$, donc le triangle ABC n'est pas isocèle (on peut aussi montrer qu'il n'est pas rectangle).

9. **Faux.** M$(x\,;\,y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (x-3) \times \frac{5}{3} - (y-1) \times \frac{-1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{11}{2} = 0$$

qui n'est pas la même équation que celle proposée car les coefficients de *x* et *y* sont de même signe dans l'une, de signes opposés dans l'autre, donc ne peuvent être proportionnels.

10. **Faux.** L'algorithme calcule effectivement la somme $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$ ... Mais arrivé à l'étape 6, on constate que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} = 1 + \frac{1769}{3600} < 1{,}5$, donc l'algorithme se poursuit puis calcule encore la somme : $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} = 1 + \frac{1913}{3600} = \frac{5513}{3600} > 1{,}5$ et s'arrête alors seulement.

Problème

Partie A : calculs d'intérêts

1. Les trois capitaux successifs sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,05

$\left(\frac{1.05}{1} = \frac{1{,}1025}{1{,}05} = 1{,}05\right)$

2. Voir annexe.
3. Taux = $\frac{a}{12}\% = \frac{10}{12}\% = \frac{5}{6}\% = \frac{5}{600} = \frac{1}{120}$.

Chaque capital est donc égal au précédent ajouté de $\frac{1}{120}$ du précédent, soit $C\left(1 + \frac{1}{120}\right) = C \times \frac{121}{120} \approx 1{,}0083\,C$. Les capitaux successifs du tableau sont donc les termes successifs d'une suite géometrique de premier terme 1 et de raison $1 + \frac{1}{120} = \frac{121}{120}$.
Le capital fin décembre est donc égale à $\left(1 + \frac{1}{120}\right)^{12}$ milliers d'euros.

4. Pour chaque entier n, U_n est le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite géométrique de raison $1 + \frac{a}{100n}$ et de premier terme 1.
   Donc $U_n = \left(1 + \frac{a}{100n}\right)^n$.

Annexe partie A

	Intérêts (en milliers)	Capital (en milliers)
Début janvier		1,000
Fin janvier	0,0083	1,0083
Fin février	0,0084	1,0167
Fin mars	0,0084	1,0252
Fin avril	0,0085	1,0337
Fin mai	0,0086	1,0423
Fin juin	0,0086	1,051
Fin juillet	0,0087	1,0598
Fin août	0,0088	1,0686
Fin septembre	0,0089	1,0775
Fin octobre	0,0089	1,0865
Fin novembre	0,0090	1,0955
Fin décembre	0,0091	1,1047

Partie B : Etude théorique

1. On conjecture que (a_n) est la suite « inférieure » et (b_n) est la suite « supérieure ».
   La suite (a_n) serait donc croissante et la suite (b_n) serait décroissante.

2. Comme n est un entier naturel non nul, $1 + \frac{1}{n}$ est strictement plus grand que 1 et puisque $a_n > 0$ on en déduit que $a_n \leq b_n$ pour tout entier naturel non nul n.

3.
   a. L'inégalité suivante pour tout nombre réel x, $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ se traduit graphiquement par la position de la courbe représentative de la fonction exponentielle au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
   b. En posant $= \frac{1}{n}$, on obtient : $1 + \frac{1}{n} \leq \mathrm{e}^{1/n}$.
   La fonction puissance $n^{\text{ième}}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}$ c'est-à-dire que $a_n \leq \mathrm{e}$ pour tout entier naturel n non nul.
   c. La suite (a_n) est croissante et majorée donc elle converge.

4.
   a. Par B.2, on a $a_n \leq b_n$ donc $b_n - a_n \geq 0$.
   D'autre part $b_n - a_n = a_n \times \frac{1}{n} \leq \frac{\mathrm{e}}{n}$ puisque $a_n \leq \mathrm{e}$ par B.3.b)
   Ainsi $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

b. On en déduit que $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{e}{n}$ pour tout entier naturel *n* non nul. Or :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \text{ donc } \lim_{n\to\infty} (a_n + \frac{\mathrm{e}}{n}) = \mathrm{e}$$

et par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (b_n) converge vers e.

c. La suite (b_n) est décroissante et converge vers e , donc $b_n \geq \mathrm{e}$ pour tout entier naturel *n* non nul.

d. On en déduit en particulier que $b_1 \geq \mathrm{e}$, or $b_1 = 4$, donc $4 \geq \mathrm{e}$.

Alors l'inégalité prouvée en B.4.a) devient, pour tout entier naturel *n* non nul :

$$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

5. Par B.3.b), $a_n \leq \mathrm{e}$ et par B.4.c), $b_n \geq \mathrm{e}$, donc $b_n \geq \mathrm{e} \geq a_n$ pour tout entier naturel *n* non nul. Pour obtenir un encadrement du nombre e à 10^{-2} près, il suffit donc de calculer les termes successifs a_n et b_n tant que $b_n - a_n > 10^{-2}$.
Puisque $b_n - a_n \leq \frac{4}{n}$, en prenant *n* tel que $\frac{4}{n} = 10^{-2}$, c'est-à-dire *n* = 400, on obtient :

$$a_{400} \leq \mathrm{e} \leq b_{400}$$

ce qui fournit l'encadrement : 2,71 < e < 2,72 .

Partie C : Généralisation

1. La tangente à la courbe au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ est horizontale donc :

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

2. $f(x) = \ln(1+x) - x + cx^2$ donc :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - x + c\,x^2 = \frac{2cx^2 + (2c+1)x}{1+x} = \frac{2cx^2 + (2c-1)x}{1+x}$$

3.

$$f'(-\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2c(\frac{-1}{2})^2 + (2c-1)\left(\frac{-1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{c}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

4. a) D'après les calculs précédents, on obtient :

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x}{1+x} = \frac{x(2x+1)}{1+x}$$

donc $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
La fonction *f* est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et puisque *f* (0) = 0, on en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

b) D'après la question B.3.a) : pour tout réel *x*, $1 + x \leq \mathrm{e}^x$. Comme la fonction logarithme népérien est croissante, on en déduit, pour tout réel $x \geq -1$, que $\ln(1+x) \leq x$.

c) D'après la question précédente, on a $\ln(1+x) \leq x$ c'est-à-dire $\ln(1+x) - x \leq 0$ et d'après la question C.4a), on sait que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ ce qui se traduit aussi par l'inégalité suivante : $\ln(1+x) - x + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x \geq -x^2$.

Finalement, on a bien la double inégalité souhaitée, pour tout réel $x \geq 0, -x^2 \leq \ln(1+x) - x \leq 0$.

5. Dans la double inégalité précédente, on pose $x = \frac{t}{n}$ d'où, pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier naturel $n \neq 0$:

$$-\left(\frac{t}{n}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n} \leq 0$$

puis en multipliant par $n > 0$:

$$-\frac{t^2}{n} \leq n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - t \leq 0.$$

6. L'inégalité précédente permet d'obtenir un encadrement de $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$.

En effet :

$$-\frac{t^2}{n} \leq n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - t \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{t^2}{n} + t \leq \ln\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right) \leq t$$

En appliquant la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, on en déduit, pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier naturel n non nul :

$$\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}+t} \leq \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^t$$

Or :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t^2}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} -\frac{t^2}{n} + t = t \text{ donc } \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}+t} = \mathrm{e}^t$$

Donc par le théorème des gendarmes, on prouve que :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \mathrm{e}^t$$

Donc, pour tout réel $t \geq 0$, la suite de terme général $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$ tend vers e^t.

7. A la question A.4, on a défini la suite de terme général $U_n = \left(1+\frac{a}{100n}\right)^n$.

En prenant $t = \frac{a}{100}$ à la question précédente, on obtient que U_n converge vers $\mathrm{e}^{\frac{a}{100}}$.