

Admission au Collège universitaire - Session 2014

Copie épreuve de Mathématiques

(Coefficient 2)

Exercice Vrai/Faux

1) On note par récurrence que
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 5.$

Initialisation: $n=0$ $u_0 = 8$ on a $8 \geq 5.$

Hérédité: Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $u_n \geq 5$
et note que $u_{n+1} \geq 5.$

Par hypothèse $u_n \geq 5$ Donc $\frac{3}{5} u_n \geq 3$
Donc $\frac{3}{5} u_n + 2 \geq 5$ Donc $u_{n+1} \geq 5.$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 5.$

Soit $x_n = u_{n+1} - u_n, n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \frac{3}{5} u_n + 2 - u_n = -\frac{2}{5} u_n + 2$$

Or $u_n \geq 5$ Donc $-u_n \leq -5$

$$\text{Donc } -\frac{2u_n}{5} \leq -2$$

Et $x_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. VRAI.

2) Soit $u_n = -\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{n+1-n}{(n+1)n} = \frac{1}{(n+1)n}$$

$n(n+1) > 0$ ($n > 0$) et $1 > 0$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$

On a $u_n = -1$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 0. (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante)

On a $u_n^2 = \frac{1}{n^2}$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \quad (n > 0)$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} \quad \text{or } n > 0$$

Donc $u_{n+1}^2 < u_n^2$ Donc u_n^2 est décroissante.

C'est donc FAUX.

3) Par propriété, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + bx + 4$ admet un minimum au point d'abscisse $-\frac{b}{2}$, ($b \in \mathbb{R}$) de valeur $f(-\frac{b}{2})$

f est définie sur $\mathbb{R}$, et $f(-\frac{b}{2}) = (-\frac{b}{2})^2 + b(-\frac{b}{2}) + 4$

$$f(-\frac{b}{2}) = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 4 = \frac{b^2 - 2b^2}{4} + 4$$

$$f(-\frac{b}{2}) = -\frac{b^2}{4} + 4$$

$\forall b \in \mathbb{R} \quad b^2 \geq 0$ donc $-b^2 \leq 0$ et $-\frac{b^2}{4} \leq 0$

Donc $f(-\frac{b}{2}) \leq 4$

Donc le minimum de la fonction f est donc inférieur ou égal à 4. VR+1

4) Soit $f(x) = e^x - 2e^{-x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

~~$\forall x \in \mathbb{R}$~~ , e^x est dérivable (donc e^{-x} est dérivable)
Donc par somme de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 2e^{-x}$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \quad \text{Donc } e^x + 2e^{-x} > 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$; Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par propriété f est continue sur $\mathbb{R}$ (toute fonction dérivable est continue).
Donc f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.

$$\text{Donc } \forall y \in f(\mathbb{R}), \exists! y_0 \in \mathbb{R} \mid f(y_0) = y.$$

$$\text{Soit (E): } e^x - 2e^{-x} = -1$$

$$(E) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Donc (E) a au plus une seule solution

C'est donc F.A.U.T.

5) Soit $f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. (f est dérivable)

La tangente (T) en 1 a pour équation:

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{Or } f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } f(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } T: y &= \frac{1}{1}x(x-1) + 0 \\ &= x-1. \end{aligned}$$

Soit $g(x) = x - 1 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

g est dérivable par somme de fonctions dérivables, et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

On obtient donc le tableau de variations:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	$\ominus$		$\oplus$
g		$g(1) = 0$	

Donc g admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ en 1.

$$\text{Or } g(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \geq g(1)$$

$$\text{Donc } g(x) \geq 0.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - 1 \geq f(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, la tangente à f en x est d'abscisse 1 est au dessus de la courbe représentative de f . (car $f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$)

C'est donc VR41

6) Soit Ω l'univers. Ω est ici les 10 rondelles d'acier et card(Ω) = $n = 10$.

On appelle le succès : "la rondelle est défectueuse". Il y a précisément deux succès. C'est donc une épreuve de Bernoulli.

Soit p la probabilité de succès ; $p = 0,03$.

On réalise le tirage 10 fois, qu'on suppose avec remise. Donc chaque tirage est indépendant et équiprobable.

On est donc dans le cas d'une loi binomiale. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès, X peut prendre toutes les valeurs strictes entre 0 et 10.

$$\text{Donc } \forall k \in [0; 10], p(X=k) = \binom{10}{k} (0,03)^k (0,97)^{10-k}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } p(X=0) &= \binom{10}{0} \times 1 \times (0,97)^{10} \\ &= 1 \times 1 \times (0,97)^{10} \approx 0,737 \end{aligned}$$

$$\text{Or } p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$$

$$\text{Donc } p(X \geq 1) \approx 0,263 \text{ (autour de } 10^{-3} \text{ près)}$$

Donc la probabilité de tirer au moins une rondelle défectueuse est environ 0,263.

C'est donc VR 41.

7) Soit B l'événement "le joueur tire une boule blanche". On $\bar{B}$: "le joueur tire une boule rouge".

Soit B un succès. Le joueur a joué 20 fois, c'est donc une expérience de Bernoulli et $p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$

Cette expérience est indépendante; on se place donc dans le cadre d'une loi binomiale d'univers 14 et de probabilité de succès $p(B) = \frac{10}{14}$.
On $p(B) = \frac{5}{7}$ et $p(\bar{B}) = \frac{2}{7}$, $n = 20$.

Soit X la variable aléatoire associée au succès B ,

$$\text{Par propriété, } E(X) = 20 \times \frac{5}{7} = \frac{100}{7}$$

(en nombre de boules)

Soit Y la variable aléatoire associée à l'échec $\bar{B}$,

$$\text{De même, } E(Y) = 20 \times \frac{2}{7} = \frac{40}{7} \text{ (en nombre de boules).}$$

Chaque boule blanche rapporte $2€$ et chaque boule rouge retire $3€$.

Donc soit G la variable aléatoire associée au gain,

$$E(G) = 2 \times E(X) - 3 \times E(Y)$$

$$= \frac{200}{7} - \frac{120}{7} = \frac{80}{7} \text{ FAUX.}$$

$$\text{Donc } E(G) = \frac{80}{7} \neq \frac{200}{7}$$

8) Soient $(A, B, C) \in P^3$
avec $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$ et $C(1, 5)$

$$\begin{aligned}\text{Par propriété, } AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{17}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{De même, } AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{De même, } BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{10}.\end{aligned}$$

Or $\sqrt{10} \neq 5$, $5 \neq \sqrt{17}$ et $\sqrt{17} \neq \sqrt{10}$.

Donc $AB \neq BC$, $AB \neq AC$ et $BC \neq AC$.

Donc A, B, C ne forment pas un triangle isocèle.
FALUX.

9) Soit (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$,
 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
Un vecteur $\vec{n}$ directeur de (d) est $\vec{n} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Donc $\vec{n} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ est vecteur de (d) : $\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}y + c = 0$.

On prend $A(1)$, A appartient à (1) .

$$\text{On a } 3 \times \frac{5}{3} + 1 \times \left(+\frac{1}{2}\right) + c = 0$$

$$\text{Donc } 5 + \frac{1}{2} + c = 0 \quad \text{Donc } c = -\frac{11}{2}.$$

$$\text{Donc (d) a pour équation } \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{11}{2} = 0$$

$$\text{Donc (d) a pour équation } \frac{100}{3}x + 10y - 55 = 0$$

$$\text{Donc (d) n'a pas pour équation } -3x + 10y - 1 = 0.$$

C'est donc FAUX.

10) \begin{matrix} \text{étapes} \\ \text{valeurs} \end{matrix}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	2		3		4		5		6
S	1	$1 + \frac{1}{2^2}$			$1,25 + \frac{1}{9}$		$1,36 + \frac{1}{16}$		$1,42 + \frac{1}{25}$	
S_n	1		1,25		1,36		1,42		1,46	

$$\text{à l'étape 11, } S = 1,46 + \frac{1}{36} \approx 1,49 < 1,5$$

$$\text{Donc à l'étape 11, } n = 7$$

$$\text{À l'étape 13, } S = 1,49 + \frac{1}{7^2} \approx 1,51 > 1,5.$$

$$\text{Donc l'algorithme calcule } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$$

C'est donc FAUX.

Partie A : Calculs d'intérêts

1) Les trois capitaux successifs figurent dans la dernière ligne du tableau (T_2) sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,05.

2)

Problème – Partie A – Question 2

	Intérêts (en milliers)	Capital en milliers arrondi à 10^{-4}
Début janvier		1
Fin janvier	0,0083	1,0083
Fin février	0,0084	1,0167
Fin mars	0,0085	1,0252
Fin avril	0,0086	1,0338
Fin mai	0,0085	1,0428
Fin juin	0,0088	1,0511
Fin juillet	0,0087	1,0598
Fin août	0,0088	1,0686
Fin septembre	0,0089	1,0775
Fin octobre	0,0090	1,0865
Fin novembre	0,0091	1,0956
Fin décembre	0,0091	1,1047

3) Chaque mois, le capital est augmenté de $\frac{10}{12} \%$. Il est donc multiplié par $(1 + \frac{10}{12} \%)$

Il est donc multiplié par $(1 + \frac{1}{120})$

La suite de capital est donc une suite géométrique de raison $(1 + \frac{1}{120})$.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentant le capital à peu près tous les ans (début janvier) $U_0 = 1$, et est géométrique de raison $(1 + \frac{1}{120})$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 \times \left(1 + \frac{1}{120}\right)^n \\ = \left(1 + \frac{1}{120}\right)^n \quad (U_0 = 1).$$

Donc fin décembre, pour $n = 12$,

$$U_1 = \left(1 + \frac{1}{120}\right)^{12}$$

4) Dans l'exemple précédent, le capital était augmenté de $\frac{2}{12} \%$ par mois, ce qui

représente 12 mois. Par analogie, une année compte n versements, donc ici le capital est augmenté de $\frac{2}{n} \%$ à chaque versement.

Donc, le capital représenté par la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $(1 + \frac{2}{n})$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

Partie B : Étude théorique

$$1) \quad a) \quad a_1 = (1+1)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$$

Donc (a_n) est représentée en gras en bas du graphique ; (b_n) est en noir en haut du graphique.

b) Graphiquement, on conjecture la croissance de (a_n) vers e et la décroissance de (b_n) vers e .

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ soit } f_n = b_n - a_n$$

$$f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right)$$

$$f_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{Or } n > 0 \text{ Or } \frac{1}{n} > 0$$

$$\text{et } 1 + \frac{1}{n} > 0 \quad \text{Donc } f_n > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq b_n$.

$$3) \quad a) \quad \text{Soit (I): } 1+x \leq e^x$$

$$\text{Soit } f(x) = e^x, \quad g(x) = 1+x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

L'inégalité (I) indique que la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ de g est toujours au-dessous de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f .

b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$

Donc $\forall n \in \mathbb{R}_+^*, 1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}}$ ($n > 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{R}_+^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$ car?

car $1 + \frac{1}{n} > 0$. On a $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}_+^*$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq e$. CQFD.

c) On sait que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (cf 1b)) et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq e$.
Donc (a_n) est majorée par e .

Donc d'après le théorème de convergence monotone, (a_n) est convergente.

f) On voit dans la question 2) que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = a_{n+1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n > 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n - a_n = \frac{1}{n} a_n$

On a $a_n \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} a_n \leq \frac{e}{n}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n - a_n \leq \frac{e}{n}$

Le plus on a vu en question 2) que $a_n \leq b_n$

Donc $b_n - a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{e}{n}$

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{2}{n}$$

$$\text{on } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Donc d'après le théorème de sandwich d'une limite par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$.

on (b_n) est décroissant et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissant.

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Donc par théorème sur les suites adjacentes,

(a_n) et (b_n) convergent vers la même limite

Donc (b_n) converge. On $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$

c) On suppose que $\exists n \in \mathbb{N} / b_n < \epsilon$

Or (b_n) décroît,

Il $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, b_n < \epsilon$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n < \epsilon$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n < \epsilon$

ce qui absurde, car
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \epsilon$.

Il n'y a pas conservation de l'égalité stricte par la limite.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq \epsilon$.

d) (b_n) est décroissante, donc (b_n) est majorée par b_1

$$\begin{aligned} \text{Or } b_1 &= 2 + \left(1 + \frac{1}{1}\right) \quad \text{avec } a_1 = 2 \text{ (cf 4a))} \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \leq b_1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* b_n \leq 4$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \geq \epsilon$ donc par transitivité,
 $\epsilon \leq 4$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{\epsilon}{n}$ (cf 4a))

Or $\epsilon \leq 4$ donc $\frac{\epsilon}{n} \leq \frac{4}{n}$ ($n \geq 1$)

Donc par transitivité, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{4}{n}$.

Partie C : Généralisation

1) Graphiquement, on observe que f admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = -0,5 = -\frac{1}{2}$.

On $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ par propriété.

2) $\forall x \in]-1; +\infty[$, f est dérivable

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + 2cx \\ &= \frac{1 - (1+x) + (1+x)2cx}{1+x} \\ &= \frac{x + 2cx + 2cx^2}{1+x} \\ &= \frac{2cx^2 + (2c-1)x}{1+x} \quad \forall x \in]-1; +\infty[\end{aligned}$$

3) On a $-\frac{1}{2} \in]-1; +\infty[$,

$$\text{Donc } f'(-\frac{1}{2}) = \frac{2c(-\frac{1}{2})^2 + (2c-1)(-\frac{1}{2})}{1+x}$$

$$\text{On } f'(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2c(-\frac{1}{2})^2 + (2c-1)(-\frac{1}{2})}{1+x} = 0 \quad (x > -1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2} - c + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{c}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow c = 1.$$

$$4) a) \quad \forall x \in]-1; +\infty[, f(x) = \ln(1+x) - x + x^2$$

$$\text{On } f(0) = \ln(1) - 0 + 0 \\ = 0.$$

$$\text{Or } \forall x \in]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{2x^2 + x}{1+x}$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad 2x^2 \geq 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } 1+x > 0 \\ \text{Donc } \forall x \geq 0, \quad f'(x) \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad f \text{ est croissante.}$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad f(x) \geq f(0)$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0.$$

$$b) \text{ On veut noter que } \forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$$

$$\text{Or } \forall x \in]-1; +\infty[, \quad 1+x \leq e^x$$

$$\text{On a la fonction logarithme népérien est croissante sur }]0; +\infty[, \text{ et } 1+x \geq 0 \quad \forall x \in]-1; +\infty[$$

$$\text{et } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } \forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq \ln(e^x)$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

$$\text{Donc } \forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

$$c) \cdot \forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x \quad \text{car } 0 \geq -1.$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) - x \leq 0.$$

$$\cdot \text{ De plus } \forall x \geq 0, \quad f(x) \geq 0 \quad (4/a)$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) - x + x^2 \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) - x \geq -x^2.$$

$$\text{Conclusion: } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad -x^2 \leq \ln(1+x) - x \leq 0.$$

5) $\forall n \geq 0$, on pose $\frac{t}{n} = x$ (t > 0)
n est un entier naturel, donc $n \geq 0$ avec $n \neq 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{t^2}{n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n} \leq 0 \quad (\text{cf 4)-i}).$$

On a $n > 0$, donc

$$-\frac{t^2}{n} \leq n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - t \leq 0. \quad \text{CQFD.}$$

6) $\forall t \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{t^2}{n} \leq n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - t \leq 0$$

$$\text{Donc } -\frac{t^2}{n} \leq \ln\left(\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\right) - t \leq 0$$

$$\text{Donc } t - \frac{t^2}{n} \leq \ln\left(\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq t$$

$$\text{Donc } e^{\left(\ln\left(\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\right)\right)} \leq e^t$$

Car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Donc } e^{t - \frac{t^2}{n}} \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

$$\text{Donc } e^t + e^{-\frac{t^2}{n}} \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{Donc par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{n} = 0$$

$$\text{Or } \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1 \quad \text{Donc par composition des limites,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t^2}{n}} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^t + e^{-\frac{t^2}{n}} = e^t \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^t = e^t$$

Donc par théorème d'unicité d'une limite par encadrement,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t. \quad \square$

7) En question 4) A), la suite

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ ($n \geq 0$)

Donc par identification, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^2$ (cf 6))

cohérent