Admission Collège universitaire session 2013

Copie épreuve de Mathématiques

Exercice Vrai-Faux

1. Par propriété, la somme partielle d'une suite géométrique u_n de raison q et de premier terme u_0 est :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Ici, on a $q = \frac{4}{5}$ et $u_0 = -1$, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison q $-1 < q < 1$)

D'où $\lim_{n \to +\infty} -1 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -1 \times \frac{1}{\frac{1}{5}} = -5$

La suite S_n converge donc vers -5 : l'affirmation n° 1 fausse.

2) • $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + 3 - u_n - 3 = u_{n+1} - u_n$

• $u_{n+1} - u_n = 2u_n + 3 - u_n = u_n + 3 = v_n$

On a donc $v_{n+1} - v_n = v_n$, d'où $v_{n+1} = 2v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2, et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = 4$. L'affirmation n° 2 est donc vraie.

3) • On considère la propriété P_n : « $u_n = n+1$ » et on cherche à la montrer par récurrence.

* On a $u_0 = 1 = 0+1$: P_0 est donc vérifiée.

* On suppose maintenant que pour une certaine valeur k de $\mathbb{N}$, P_k soit vraie. On aurait alors :

$$P_k \Rightarrow u_k = k+1 \Rightarrow u_k \pm 1 = k+2 \Rightarrow u_{k+1} = (k+1)+1$$
$\Rightarrow P_{k+1}$ est vérifiée.

P est donc héréditaire, et vérifiée pour $n=0$: on a donc bien $u_n = n+1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + 1 = +\infty$ et donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, d'où par composition $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-u_n} = 0$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$: la suite v_n admet donc une limite égale à 0.

De plus, $u_{n+1} - u_n = 1$, donc $v_{n+1} - v_n = e^{-u_n - 1} - e^{-u_n}$, $u_{n+1} > u_n$ et comme la fonction $x \to e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{-u_n-1} - e^{u_n} < 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0$

La suite v_n admet donc une limite finie et est strictement décroissante. Elle est donc convergente. L'affirmation 3 est vraie.

4) Chaque appel constitue une expérience aléatoire admettant deux issues : la personne accepte de répondre (réussite, $p = 0,2$), soit la personne refuse de répondre (échec, $1-p = 0,8$).
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.
La répétition de cette expérience 50 fois, de manière identique et indépendante constitue donc un schéma de Bernoulli.
Si on note X le nombre de réussite, c'est à dire de réponse positive, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$, $p = 0,2$.

$$P(X\geq 6) = \sum_{k=6}^{50} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

À la calculatrice, on a $P(X\geq 6) \simeq 0{,}95197$ (à 10^{-5} près).

La probabilité qu'au moins 6 personnes acceptent est donc supérieure à 0,95. L'affirmation 4 est donc vraie.

5) On pose $u_n = 2(-2)^n$, d'où $u_{n+1} = -2u_n$ et $u_0 = 2$

Pour tout $A \in]0;+\infty[$ on a donc :

$u_{2n} > A$

$\Rightarrow 2(-2)^{2n} > A$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (-2)^{2n} > \frac{A}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 4^n > \frac{A}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \ln(4^n) > \frac{A}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n\ln(4) > \frac{A}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n > \frac{A}{2\ln(4)}$ et $n \in \mathbb{N}$

On a donc pour tout A de $]0;+\infty[$, au moins un rang n de $\mathbb{N}$ tel que $u_{2n} > A$. La suite u_n n'est donc pas majorée.

De plus, on a pour tout $u_n > A$ avec $A \in]0;+\infty[$:

$u_{n+1} = -2u_n$ et $u_{n+1} < 0$, donc $u_{n+1} < A$.

La suite u_n ne diverge donc pas vers $+\infty$ d'après la définition de la limite.

La propriété 5 est donc fausse : u_n est non majorée, et ne diverge pas vers $+\infty$.

6) $\ln(x)$ n'est définie que si $x > 0$ [1]

Pour $x > 0$, on a :

$\ln(x) + \ln(x+1) = \ln 2$

$\Rightarrow \ln(x^2 + x) = \ln(2)$

$\Rightarrow x^2 + x = 2$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ ou $x = -2$

Comme $x > 0$, l'unique solution réelle de $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ est 1. L'affirmation 6 est donc vraie.

7) La tangente à la courbe représentative de f en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$

Cette tangente est parallèle à la droite d'équation $(y = 3x)$ si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, c'est à dire si $f'(0) = 3$.

On pose $u(x) = (x+1)^2$ et $v(x) = e^{-x}$

On a donc $u'(x) = 2(x+1)$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$f(x) = u(x)v(x)$, donc $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

D'où $f'(0) = u'(0)v(0) + v'(0)u(0)$

$= 2 \times 1 - 1 \times 1$

$= 1$

Donc $f'(0) \neq 3$: la tangente à la courbe représentative de f en 0 n'est donc pas parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.

L'affirmation 7 est fausse.

8) On pose $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$$

$$f'(x) = 3(x+2)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après les ~~limites des polynomes~~ théorèmes de limites des polynomes, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

De plus, $f(-2) = 0$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}$

$$= -\frac{8}{27} + \frac{16}{9} - \frac{8}{3}$$

$$= -\frac{8}{27} + \frac{48}{27} - \frac{72}{27} = -\frac{32}{27}$$

Or -2 est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $f(-2)$.
$f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -2]$: par Bijection, l'équation $f(x) = -2$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $]-\infty ; -2]$.

D'après le tableau page précédente $f(x)$ admet un minimum égal à $-\frac{32}{27}$ sur $]-2 ; +\infty[$. Comme $-2 < -\frac{32}{27}$, l'équation $f(x) = -2$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Ainsi, l'équation $f(x) = -2$ n'a qu'une seule solution réelle, comprise entre $]-\infty$ et $-2]$.

L'affirmation $x^3 + 4x^2 + 4x = -2 \Leftrightarrow f(x) = -2$ a trois solutions est donc fausse.

9)

Etapes	0	1	2	3	4	5	6	7
n	1	2		3		4		
c	1		5		14		30	
a	20							$n = 4$
Affichage								

Si on saisit la valeur 20, la sortie (affichage) est bien 4.
L'affirmation 9 est donc vraie.

10) On dresse un tableau des cas possibles, et on établit dans un deuxième tableau la loi de X.
Le tableau donne X pour tous les cas possibles.

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Comme tous les évènements (Dé 1 ; Dé 2) sont équiprobables, on dresse le tableau donnant la loi de X.

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} x \cdot P(x) = \frac{1\times 1 + 2\times 3 + 3\times 5 + 4\times 7 + 5\times 9 + 6\times 11}{36}$$

$$= \frac{1+6+15+28+45+66}{36}$$

$$= \frac{161}{36}$$

L'espérance de la variable aléatoire X est donc bien $E(X) = \frac{161}{36}$; l'affirmation 10 est donc vraie.

Problème-Paritie A

1) On pose $u(x) = \left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{ex}{2} + \frac{e}{2x}$

On a $u'(x) = \frac{e}{2} - \frac{e}{2x^2}$

$f(x) = \ln(u(x))$, donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$f'(x) = \frac{\frac{e}{2} - \frac{e}{2x^2}}{\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x + \frac{1}{x} > 0$, donc $f'(x) > 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 0$

à détailler un peu

$\Leftrightarrow x > 1$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = \ln\left(\frac{e}{2}(2)\right) = \ln(e) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x} = +\infty$ et par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(u(x))$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, par somme $\lim\limits_{x\to 0} x+\frac{1}{x} = +\infty$, par produit

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} u(x) = +\infty$

Par composition, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty$: l'axe des ordonnées est donc bien asymptote à C. Pour tout $x>0$, on a :

$$f(x) - \ln\left(\frac{e}{2}x\right) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) - \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{x}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ln\left(\frac{e}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$

La courbe T est donc bien asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et l'axe des ordonnées est bien asymptote à $\mathcal{C}$ quand x tend vers 0

3. a) On a $f'(x) = \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}$

Pour tout $x>0$, $\frac{1}{x^2}>0$, donc $1-\frac{1}{x^2}<0$ non!

Pour tout $x>1$, $x>1$ et $\frac{1}{x}>0$, donc $x+\frac{1}{x}>1$
Pour tout $x \in]0;1]$, $x>0$ et $\frac{1}{x} \geqslant 1$, donc $x+\frac{1}{x}>1$

On a donc pour tout $x>0$, $1-\frac{1}{x^2}<1$ et $x+\frac{1}{x}>1$,
d'où $\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}}<0 \Rightarrow f'(x)<0$.
non

On a donc bien pour tout $x>0$, $f'(x)<1$.

b) On pose $h(x)=f(x)-x$
$h'(x)=f'(x)-1$
Comme $f'(x)<0$ sur $[0;+\infty[$, $f'(x)-1<0$

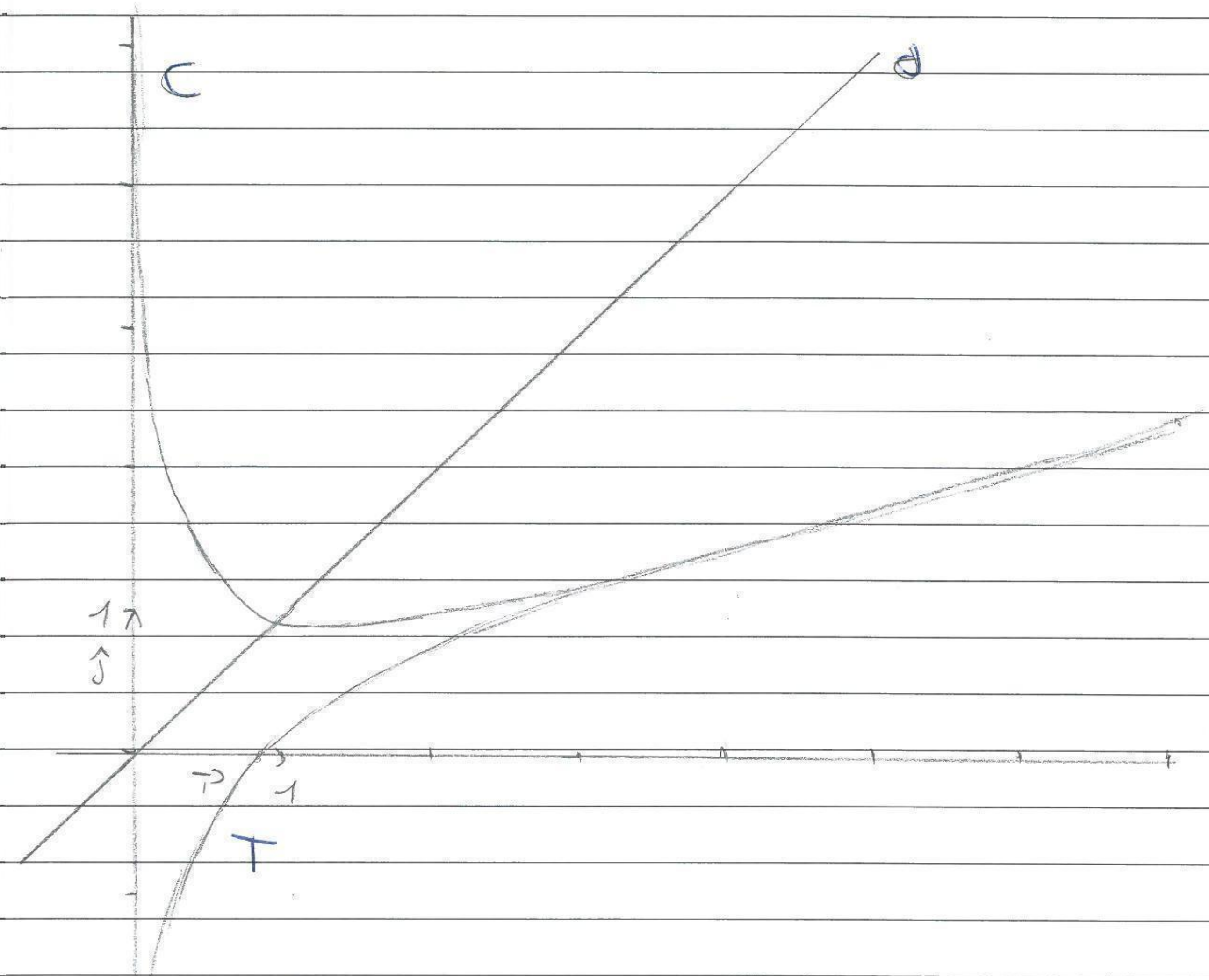
D'où le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\oplus$	$\searrow$ 0	$\ominus$

$h(1) = \ln(e)-1=0$

Comme h est décroissante, pour tout $x \geqslant 1$, $h(x) \leqslant 0$, et $f(x) \leqslant x$. Réciproquement, si $x \in]0;1]$, $h(x) \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant x$
La courbe C est donc en dessous de d pour tout $x>1$, ~~au~~ dessus de d pour tout $x \in]0;1]$, et confondue avec d en $x=0$.

4. Voir figure



Problème-Partie B

1- On considère la propriété P suivante " $u_n \geqslant 1$ "

- On a $u_0 \geqslant 1$, donc P_0 vraie.

- On suppose que pour une certaine valeur k de $\mathbb{N}$, P_k soit vérifiée.

On a alors :

$u_k \geqslant 1$, donc $(u_k - 1)(u_k - 1) = 0$ n'a pas de solution, d'où $u_k^2 - 2u_k + 1 > 0$, et par division :

$u_k + \frac{1}{u_k} \geqslant 2$

il y a plus simple

$\Rightarrow \quad \frac{e}{2}\left(u_k + \frac{1}{u_k}\right) \geqslant e$

$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{e}{2}\left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)\right) \geqslant \ln(e)$

$\Rightarrow \quad u_{k+1} \geqslant 1 \Rightarrow P_{k+1}$

La propriété P_n est donc héréditaire et vraie au rang 0 : on a donc bien pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \quad \text{et} \quad u_n > 1$$

Sur quel intervalle ?

Or d'après la question 3b) de la partie A, $f(x) - x \leq 0$, d'où $f(u_n) - u_n \leq 0$, et u_n est donc décroissante.

3) (u_n) est minorée par 1 et décroissante : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

Problème-Partie C

1) $u_0 = 1 \Rightarrow f(u_0) = 1 \Leftrightarrow u_1 = 1$
Cela étant vrai pour tout n, si $u_0 = 1$ alors (u_n) est constante et égale à 1.

2) $u_1 \simeq 1,080043 \pm 10^{-6}$
$u_2 \simeq 1,002962 \pm 10^{-6}$
$u_3 \simeq 1,000004 \pm 10^{-6}$

3) a) Pour tout $t > 1$, on pose $a(t) = \ln(1+t) - t$

$a'(t) = \frac{1}{1+t} - 1$

$a'(t) = \frac{1-1-t}{1+t} = \frac{-t}{1+t}$, $1+t > 0$ pour tout $t \in]-1;+\infty[$

d'où :

t	-1		0		$+\infty$
$a'(t)$		$+$	0	$-$	
$a(t)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$a(0) = \ln(1) - 0 = 0$

α admet donc un maximum en $t=0$, or $\alpha(0)=0$.
Ainsi, pour tout t de $]-1;+\infty[$, $\ln(1+t)-t \leqslant 0$
$\Rightarrow \ln(1+t) \leqslant t$

b) $f(1+h) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(1+h+\frac{1}{1+h}\right)\right)$

$= \ln\left(\frac{e}{2}\left(\frac{(1+h)^2+1}{1+h}\right)\right)$

$= \ln\left(\frac{e}{2}\left(\frac{1+h^2+2h+1}{h+1}\right)\right)$

$= \ln\left(\frac{e}{2}\left(\frac{2+2h+h^2}{h+1}\right)\right)$

$= \ln\left(e\left(\frac{1+h+\frac{h^2}{2}}{h+1}\right)\right)$

$= \ln(e) + \ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right)$

$= 1 + \ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right)$

$\Leftrightarrow f(1+h)-1 = \ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right)$

c) $h \geqslant 0 \Rightarrow h+1 \geqslant 1 \Rightarrow f(h+1) \geqslant f(1)$

$\Rightarrow f(h+1) \geqslant 1$ (voir PARTIE A QUESTION 1)

$\Rightarrow f(h+1)-1 \geqslant 0$

D'autre part, on pose $b(h) = f(h+1) - 1 - \frac{h^2}{2}$

$b'(h) = f'(h+1) - h$
D'après la question 3(a), on a $f'(x) < 1$ pour tout x de x.
On pose $j = h+1$
$b'(h) > 0 \Leftrightarrow f'(j) - j - 1 > 0$
Or pour tout j de $]0;+\infty[$, $f'(j) < 1$

D'où $b'(j) < 0$ ($j > 0$, donc $-j < 0$ et $f'(j) - j - 1 < 0$)

On a donc bien pour tout j de $\mathbb{R}^+$, $b(j) > 0$.
Comme $j = h+1$, $b'(h) > 0$ pour tout h de $[0;+\infty[$.

D'où le tableau de variations suivant :

h	0	$+\infty$
$b'(x)$	$-$	
$b(x)$	$0 \searrow$	

$b(0) = f(1) - 1 = 0$

On a donc pour tout x, $b(x) < 0 \Rightarrow f(1+x) - \frac{x^2}{2} - 1 \leq 0$
$\Rightarrow f(1+h) - 1 \leq \frac{h^2}{2}$

On a donc bien $0 \leq f(1+h) - 1 \leq \frac{h^2}{2}$ pour tout $h \in$ $[0;+\infty[$.

4) $v_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = v_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_{n+1})$
$\Rightarrow v_{n+1} = f(u_{n+1}) - 1$

D'après la question 3.c) de la PARTIE C, on a $f(1+h) - 1 \leq \frac{h^2}{2}$; de plus $u_n \geq 1$ d'après la partie B.

D'où $f(v_n + 1) - 1 \leq \frac{v_n^2}{2} \Rightarrow u_{n+1} - 1 \leq \frac{v_n^2}{2}$

$\Rightarrow v_{n+1} \leq \frac{v_n^2}{2}$

5) On considère la propriété S définie par (page suivante)

S_n : « $0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2n-1}$ » pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

* On a $u_1 \geqslant 1$, donc $v_1 \geqslant 0$ et on a

$2\left(\frac{v_1}{2}\right)^1 = v_1$ d'où $0 \leqslant v_1 \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2\times 1-1}$:

La propriété S est donc vérifiée au rang 1.

* On suppose que pour une certaine valeur k de $\mathbb{N}^*$ S_k soit vraie. On a alors :

$$0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant u_n \leqslant 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}} + 1$$

$$\Rightarrow f(1) \leqslant u_{n+1} \leqslant f\left(2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right) + 1$$

car f est croissante sur ---

$$\Rightarrow 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{e}{2}\left(2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}} + \frac{1}{2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \ln\left(\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}} + \frac{1}{2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2n-1}}\right) + 1$$

et alors ?

6) $u_p - 1 \leqslant 10^{-20}$

$$\Rightarrow v_p \leqslant 10^{-20} \Rightarrow 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2n-1} \leqslant 10^{-20}$$

$v_1 \neq v_0$

$$\Rightarrow \ln\left(\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-20}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (2n-1)\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant \ln\left(\frac{10^{-20}}{2}\right)$$

erreur de calcul

$$\Rightarrow 2n - 1 \geqslant \frac{\ln(10^{-20}/2)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(10^{-20}/2)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right) \times 2} + 2$$

$$\Rightarrow \cancel{n \geqslant 34}$$